

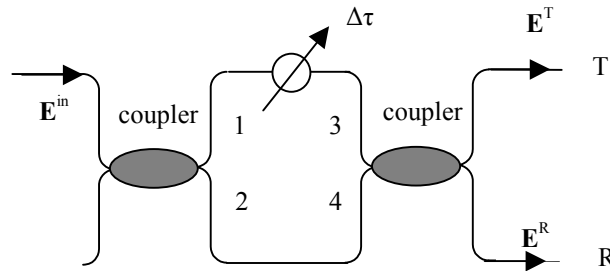
# ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Α.1 ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΕ ΟΠΤΙΚΑ ΦΙΛΤΡΑ

#### Άσκηση Α.1.1

(α) Θεωρείστε την διάταξη του σχήματος (συμβολόμετρο Mach-Zender-MZI). Δείξτε ότι η διάταξη δρα σα φίλτρο όταν μία είσοδος είναι ενεργή. Βρείτε την συνάρτηση μεταφοράς του φίλτρου τόσο στη θύρα T, όσο και στη θύρα R.



(β) Βρείτε την ελεύθερη φασματική περιοχή, το εύρος ζώνης ημίσειας ισχύος και τη λεπτότητα του φίλτρου.

(γ) Θεωρείστε μια αλυσίδα  $m$  φίλτρων MZI, το  $n$ -οστό στοιχείο της οποίας εισάγει χρονική διαφορά  $\frac{\Delta\tau}{2^n}$ . Να βρεθεί η λεπτότητα της αλυσίδας.

(δ) Με βάση το ερώτημα (γ) και δεδομένου ότι η λεπτότητα ενός Fabry-Perot φίλτρου είναι  $F = \frac{\pi \cdot \sqrt{R}}{1 - R}$ , να βρεθεί ο ελάχιστος αριθμός στοιχείων MZI, για τον οποίο η αλυσίδα έχει καλύτερη λεπτότητα από ένα Fabry-Perot. Επιπλέον, σχεδιάστε τον αριθμό στοιχείων  $n$  σαν συνάρτηση της ανακλαστικότητας  $R$ .

#### Λύση

(α) Έστω ότι το σήμα στην είσοδο είναι της μορφής:

$$\mathbf{E}^{\text{in}} = E^{\text{in}} \cdot e^{-j\omega t} \cdot \hat{\mathbf{p}}$$

Τότε στις αντίστοιχες θύρες θα εμφανιστούν τα σήματα:

$$\mathbf{E}^{\text{T}} = \sqrt{a} \cdot E^{\text{in}} \cdot e^{-j\omega t} \cdot \hat{\mathbf{p}} \quad \text{και} \quad \mathbf{E}^{\text{R}} = \sqrt{1-a} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot E^{\text{in}} \cdot e^{-j\omega t} \cdot \hat{\mathbf{p}}.$$

Το σήμα στη θύρα 1 υφίσταται μια χρονική καθυστέρηση  $\Delta t$  πριν φτάσει στον δεύτερο συζεύκτη, ενώ το σήμα της θύρας 2 φτάνει στον δεύτερο συζεύκτη αμετάβλητο. Άρα στις εισόδους του δεύτερου συζεύκτη εμφανίζονται τα σήματα:

$$\mathbf{E}^3 = \sqrt{a} \cdot \mathbf{E}^{\text{in}} \cdot e^{-j\omega \cdot \Delta t} \cdot e^{-j\omega t} \cdot \hat{\mathbf{p}} \quad \text{και} \quad \mathbf{E}^4 = \sqrt{1-a} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot \mathbf{E}^{\text{in}} \cdot e^{-j\omega t} \cdot \hat{\mathbf{p}}.$$

Προσθέτοντας κατάλληλα τα σήματα 3, 4 στις εξόδους της διάταξης εμφανίζονται τα πεδία:

$$\mathbf{E}^{\text{T}} = a \cdot \mathbf{E}^{\text{in}} \cdot e^{-j\omega \cdot \Delta t} \cdot e^{-j\omega t} \cdot \hat{\mathbf{p}} + (1-a) \cdot \mathbf{E}^{\text{in}} \cdot e^{-j\pi} \cdot e^{-j\omega t} \cdot \hat{\mathbf{p}} = (a \cdot (1 + e^{-j\omega \cdot \Delta t}) - 1) \cdot \mathbf{E}^{\text{in}} \cdot e^{-j\omega t} \cdot \hat{\mathbf{p}}$$

και

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{\text{R}} &= \sqrt{a \cdot (1-a)} \cdot \mathbf{E}^{\text{in}} \cdot e^{-j\omega \cdot \Delta t} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-j\omega t} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \sqrt{a \cdot (1-a)} \cdot \mathbf{E}^{\text{in}} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-j\omega t} \cdot \hat{\mathbf{p}} \\ &= \sqrt{a \cdot (1-a)} \cdot (1 + e^{-j\omega \cdot \Delta t}) \cdot \mathbf{E}^{\text{in}} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-j\omega t} \cdot \hat{\mathbf{p}} \end{aligned}$$

Για τις συναρτήσεις μεταφοράς θα πρέπει να υπολογιστούν τα ακόλουθα:

- $T^{\text{T}}(f) = \left| \frac{\mathbf{E}^{\text{T}}}{\mathbf{E}^{\text{in}}} \right|^2 = (a - 1 + a \cdot \cos(\omega \cdot \Delta t))^2 + (a \cdot \sin(\omega \cdot \Delta t))^2 = 1 - 4 \cdot a \cdot (1-a) \cdot \cos^2(\pi \cdot f \cdot \Delta t)$
- $T^{\text{R}}(f) = \left| \frac{\mathbf{E}^{\text{R}}}{\mathbf{E}^{\text{in}}} \right|^2 = 4 \cdot a \cdot (1-a) \cdot \cos^2(\pi \cdot f \cdot \Delta t)$

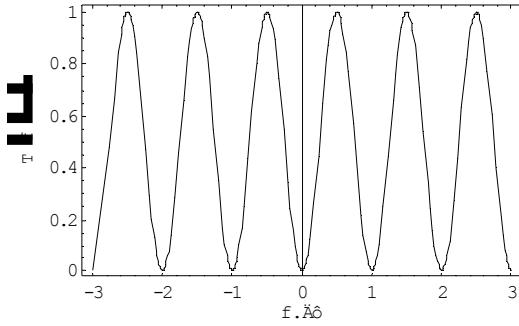
Προφανώς ισχύει ότι  $T^{\text{T}}(f) + T^{\text{R}}(f) = 1$ , αφού η διάταξη είναι ένα μη ενεργό στοιχείο χωρίς απώλειες.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει ο προσδιορισμός της παραμέτρου  $a$ , έτσι ώστε η μεταφορά ενέργειας από την είσοδο σε κάποια έξοδο να μεγιστοποιείται. Πραγματικά, θέλουμε

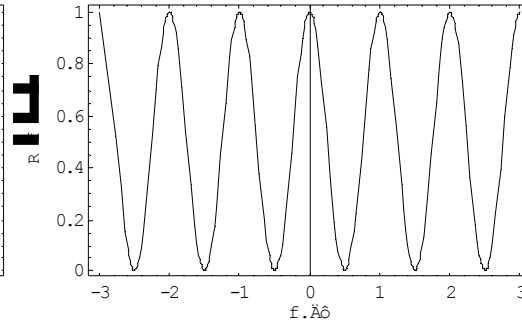
$T^{\text{T}}(f) = \max_{|\cos(\omega \cdot \Delta t)|=1} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial a}(a - a^2) = 0 \Rightarrow a = 50\%$ . Χρειάζεται λοιπόν ένας 3 dB συζεύκτης για την μεγιστοποίηση της ισχύος σε κάποια έξοδο του συμβολομέτρου. Σε αυτή την περίπτωση οι συναρτήσεις μεταφοράς παίρνουν την απλή μορφή:

$$T^{\text{T}}(f) = \sin^2(\pi \cdot f \cdot \Delta t) \quad \text{και} \quad T^{\text{R}}(f) = \cos^2(\pi \cdot f \cdot \Delta t).$$

Οι συναρτήσεις αυτές φαίνονται στα παρακάτω σχήματα:



Συνάρτηση μεταφοράς Θύρας T



Συνάρτηση μεταφοράς Θύρας R

(β) Ελεύθερη φασματική περιοχή-FSR:

$$T^R(f) = \max \Rightarrow \cos^2(\pi \cdot f_{\max} \cdot \Delta\tau) = 1 \Rightarrow \pi \cdot f_{\max} \cdot \Delta\tau = k \cdot \pi \Rightarrow f_{\max} = \frac{k}{\Delta\tau}, \quad k = 0, 1, \dots$$

$$\text{Άρα FSR} = \Delta f_{\max} = \frac{1}{\Delta\tau}.$$

Εύρος ζώνης ημίσειας ισχύος:

$$T^R(f) = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos^2\left(\pi \cdot f_{\frac{1}{2}} \cdot \Delta\tau\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \pi \cdot f_{\frac{1}{2}} \cdot \Delta\tau = \frac{\pi}{4} \Rightarrow f_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4 \cdot \Delta\tau}$$

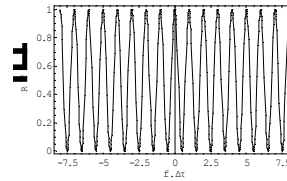
$$\text{Άρα FWHM} = 2 \cdot f_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2 \cdot \Delta\tau}.$$

Λεπτότητα φίλτρου:

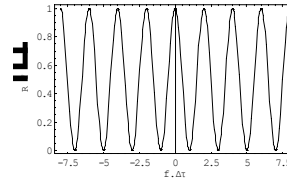
$$\text{Με βάση τα παραπάνω υπολογίζεται η λεπτότητα του φίλτρου } F = \frac{\text{FSR}}{\text{FWHM}} = 2.$$

(γ) Η συνάρτηση μεταφοράς της αλυσίδας είναι  $R(f) = \prod_{n=0}^m \cos^2\left(\pi \cdot f \cdot \frac{\Delta\tau}{2^n}\right)$ . Τα μέγιστα της συνάρτησης μεταφοράς της αλυσίδας θα βρίσκονται εκεί, όπου όλες οι επιμέρους συναρτήσεις μεταφοράς είναι μέγιστες. Άρα η ελεύθερη φασματική περιοχή θα είναι (ορίζοντάς την σαν απόσταση μεταξύ των μεγίστων)  $\text{FSR} = \max\{\text{FSR}_n\} = \frac{2^m}{\Delta\tau}$ , καθώς το n-οστό στοιχείο MZI θα παρουσιάζει ελεύθερη φασματική περιοχή  $\text{FSR}_n = \frac{2^n}{\Delta\tau}$ .

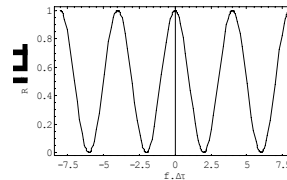
1ο Στοιχείο MZI :  
Καθυστέρηση  $\Delta\tau$



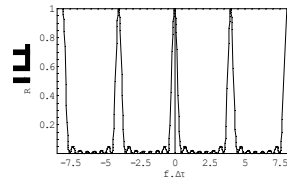
2ο Στοιχείο MZI :  
Καθυστέρηση  $\Delta\tau/2$



3ο Στοιχείο MZI :  
Καθυστέρηση  $\Delta\tau/4$



Συνάρτηση  
Μεταφοράς της  
Αλυσίδας MZI



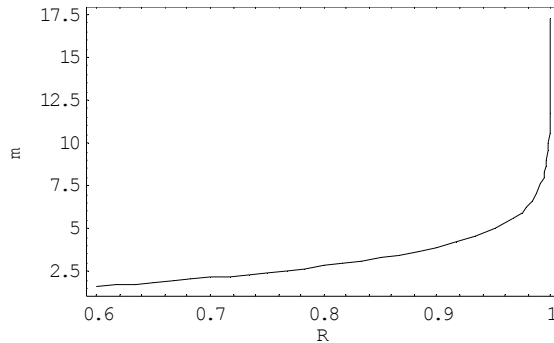
Το εύρος ζώνης ημίσειας ισχύος δε μπορεί να υπολογιστεί αναλυτικά. Προσεγγιστικά όμως, και επειδή όλες οι επιμέρους συναρτήσεις μεταφοράς είναι κανονικοποιημένες στη μονάδα, μπορούμε να πάρουμε την χειρότερη περίπτωση, για την οποία ισχύει  $FWHM = \min\{FWHM_n\} = \frac{1}{2 \cdot \Delta\tau}$  (δηλαδή μπορούμε να είμαστε σίγουροι ότι η συνολική συνάρτηση μεταφοράς θα παρουσιάζει εύρος ημίσειας ισχύος ίσο ή μικρότερο με αυτό της πρώτης βαθμίδας). Υπενθυμίζεται ότι  $FWHM_n = \frac{2^{n-1}}{\Delta\tau}$ .

Άρα στην “χειρότερη” περίπτωση  $F = \frac{FSR}{FWHM} = 2^{m+1}$ .

(δ) Για να έχει η αλυσίδα MZI καλύτερη λεπτότητα από ένα Fabry-Perot θα πρέπει:

$$2^{m+1} > \frac{\pi \cdot \sqrt{R}}{1-R} \Rightarrow m > \log_2 \left( \frac{\pi \cdot \sqrt{R}}{1-R} \right) - 1$$

Η γραφική παράσταση του αριθμού  $m$  σαν συνάρτηση του  $R$  φαίνεται στο παρακάτω γράφημα:



Παρατηρούμε ότι για μεγάλες τιμές ανακλαστικότητας του Fabry-Perot φίλτρου, ο αριθμός MZI στοιχείων που χρειάζονται για ίδια λεπτότητα αυξάνει εκθετικά.

### Άσκηση Α.1.2

(α) Βρείτε την συνάρτηση μεταφοράς του Fabry-Perot φίλτρου. Συγκεκριμένα υπολογίστε τη συνάρτηση μεταφοράς τόσο ως προς το διαδιδόμενο πεδίο, όσο και ως προς το ανακλώμενο πεδίο. Υποθέστε ότι οι καθρέπτες του φίλτρου έχουν ανακλαστικότητα  $R$ , ενώ ανάμεσα στους καθρέπτες το υλικό μήκους  $l$  έχει δείκτη διάθλασης  $n$ .

(β) Υπολογίστε την ελεύθερη φασματική περιοχή, το εύρος ζώνης ημίσειας ισχύος και την λεπτότητα του φίλτρου για μεγάλη τιμή της ανακλαστικότητας  $R$ . Που οφείλεται η μεγάλη λεπτότητα του φίλτρου (σε σχέση με το MZI και το PM φίλτρο);

(γ) Θεωρείστε δύο διαδοχικά Fabry-Perot φίλτρα, το ένα με μήκος  $l_1$  και το άλλο με μήκος  $l_2$ . Ποιά είναι η συνάρτηση μεταφοράς της διάταξης; Αν  $l_1/l_2 = k/m$  ( $k$  και  $m$  πρώτοι μεταξύ τους) βρείτε την ελεύθερη φασματική περιοχή της διάταξης, σαν συνάρτηση της ελεύθερης φασματικής περιοχής καθενός από τα επιμέρους φίλτρα..

### Λύση

(α) Έστω ότι το προσπίπτον πεδίο στο πρώτο κάτοπτρο είναι:

$$\mathbf{E}^{\text{in}} = E^{\text{in}} \cdot e^{-j\omega t} \cdot \hat{\mathbf{p}}$$

Τότε στην έξοδο θα παρουσιαστούν τα πεδία:

- Απευθείας πεδίο (δύο διελεύσεις μέσα από του καθρέπτες):

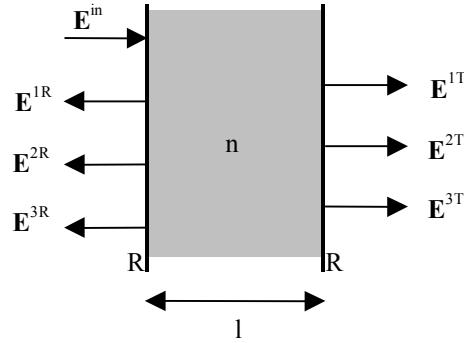
$$\mathbf{E}^{1\text{T}} = (1 - R) \cdot e^{-k \cdot l} \cdot E^{\text{in}} \cdot e^{-j\omega t} \cdot \hat{\mathbf{p}}$$

- Πρώτο ανακλώμενο (δύο επιπλέον ανακλάσεις σε σχέση με το απευθείας πεδίο):

$$\mathbf{E}^{2\text{T}} = R \cdot e^{-2 \cdot k \cdot l} \cdot \mathbf{E}^{1\text{T}}$$

- Δεύτερο ανακλώμενο (δύο επιπλέον ανακλάσεις σε σχέση με το πρώτο ανακλώμενο πεδίο):

$$\mathbf{E}^{3T} = R \cdot e^{-2 \cdot k \cdot l} \cdot \mathbf{E}^{2T} = (R \cdot e^{-2 \cdot k \cdot l})^2 \cdot \mathbf{E}^{1T} \quad \text{κ.ο.κ.}$$



Γενικά μπορούμε να γράψουμε  $\mathbf{E}^{NT} = (R \cdot e^{-2 \cdot k \cdot l})^N \cdot \mathbf{E}^{1T}$ , και επειδή το συνολικό πεδίο στην έξοδο είναι:

$$\mathbf{E} = \sum_{N=1}^{\infty} \mathbf{E}^{NT} = \sum_{N=0}^{\infty} (R \cdot e^{-2 \cdot k \cdot l})^N \cdot \mathbf{E}^{1T} = \frac{1}{1 - R \cdot e^{-2 \cdot k \cdot l}} \cdot \mathbf{E}^{1T} = \frac{(1 - R) \cdot e^{-k \cdot l}}{1 - R \cdot e^{-2 \cdot k \cdot l}} \cdot \mathbf{E}^{in}.$$

Η συνάρτηση μεταφοράς εύκολα προκύπτει ότι είναι:

$$\begin{aligned} T(k) &= \left| \frac{(1 - R) \cdot e^{-k \cdot l}}{1 - R \cdot e^{-2 \cdot k \cdot l}} \right|^2 = \frac{(1 - R)^2}{1 - 2 \cdot R \cdot \cos(k \cdot l) + R^2} = \frac{(1 - R)^2}{(1 - R)^2 + 2 \cdot R \cdot (1 - \cos(2 \cdot k \cdot l))} = \\ &= \frac{(1 - R)^2}{(1 - R)^2 + 4 \cdot R \cdot \cos^2(k \cdot l)} \end{aligned}$$

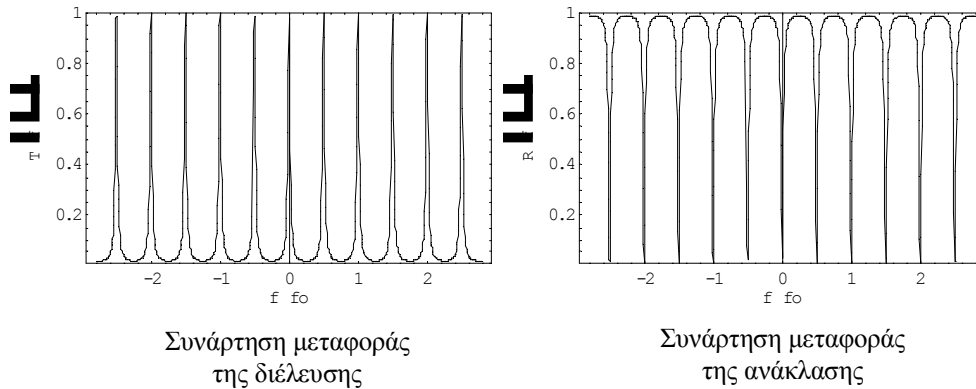
ή σε πιο συμπυγμένη μορφή:

$$T(f) = \frac{1}{1 + \left( \frac{2 \cdot \sqrt{R}}{1 - R} \cdot \sin\left( \frac{2\pi \cdot n \cdot l}{c} \cdot f \right) \right)^2}$$

Η συνάρτηση μεταφοράς για το ανακλώμενο πεδίο είναι:

$$R(f) = 1 - T(f) = \frac{\left( \frac{2 \cdot \sqrt{R}}{1 - R} \cdot \sin\left( \frac{2\pi \cdot n \cdot l}{c} \cdot f \right) \right)^2}{1 + \left( \frac{2 \cdot \sqrt{R}}{1 - R} \cdot \sin\left( \frac{2\pi \cdot n \cdot l}{c} \cdot f \right) \right)^2}$$

Οι δύο συναρτήσεις φαίνονται στο παρακάτω σχήμα για  $R=0.8$  (ορίστηκε  $f_0 = \frac{c}{n \cdot l}$ ):



(β) Ελεύθερη φασματική περιοχή:

$$T(f) = \max \Rightarrow \left( \frac{2 \cdot \sqrt{R}}{1-R} \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot n \cdot l}{c} \cdot f\right) \right)^2 = 0 \Rightarrow \frac{2\pi \cdot n \cdot l}{c} \cdot f_{\max} = k \cdot \pi \Rightarrow f_{\max} = \frac{c}{2 \cdot n \cdot l} \cdot k, \quad k = 0, 1, \dots$$

$$\text{Άρα } FSR = \Delta f_{\max} = \frac{c}{2 \cdot n \cdot l}.$$

Εύρος ζώνης ημίσειας ισχύος:

$$T(f) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{1 + \left( \frac{2 \cdot \sqrt{R}}{1-R} \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot n \cdot l}{c} \cdot f\right) \right)^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2 \cdot \sqrt{R}}{1-R} \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot n \cdot l}{c} \cdot f\right) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{2\pi \cdot n \cdot l}{c} \cdot f\right) = \frac{1-R}{2 \cdot \sqrt{R}}.$$

Αν  $R \approx 1$  τότε το δεύτερο μέλος είναι μικρό και το ημίτονο μπορεί να αντικατασταθεί με το όρισμά του:

$$\frac{2\pi \cdot n \cdot l}{c} \cdot f_{1/2} = \frac{1-R}{2 \cdot \sqrt{R}} \Rightarrow f_{1/2} = \frac{c}{2\pi \cdot n \cdot l} \cdot \frac{1-R}{2 \cdot \sqrt{R}}.$$

$$\text{Άρα } FWHM = 2 \cdot f_{1/2} = \frac{c}{2 \cdot n \cdot l} \cdot \frac{1-R}{\pi \cdot \sqrt{R}}.$$

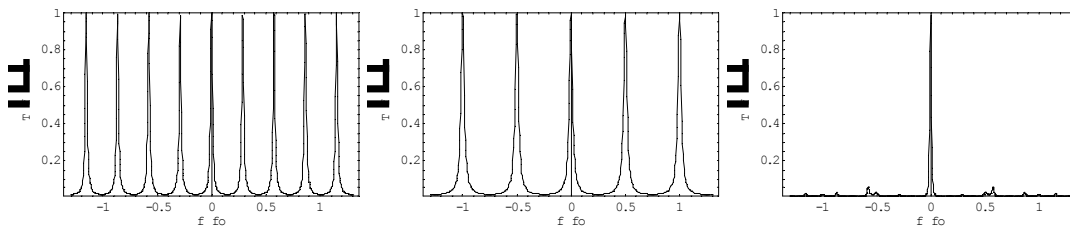
$$\text{Τελικά προκύπτει η λεπτότητα } F = \frac{FSR}{FWHM} = \frac{\pi \cdot \sqrt{R}}{1-R}.$$

Η μεγάλη τιμή που εν γένει παρουσιάζει το F-P φίλτρο οφείλεται στην συμβολή άπειρων συνιστωσών του κύματος εισόδου. Αντίθετα, στα φίλτρα MZI και PM συμβάλλουν μόνο δύο συνιστώσες.

(γ) Η συνάρτηση μεταφοράς θα είναι το γινόμενο των δύο επιμέρους συναρτήσεων μεταφοράς. Άρα:

$$T_{\text{tot}}(f) = \frac{1}{1 + \left( \frac{2 \cdot \sqrt{R}}{1-R} \cdot \sin\left( \frac{2\pi \cdot n \cdot l_1}{c} \cdot f \right) \right)^2} \cdot \frac{1}{1 + \left( \frac{2 \cdot \sqrt{R}}{1-R} \cdot \sin\left( \frac{2\pi \cdot n \cdot l_2}{c} \cdot f \right) \right)^2}$$

Η παραπάνω συνάρτηση μεταφοράς φαίνεται στο παρακάτω σχήμα για  $R=0.8$  και  $l_2 = \sqrt{3} \cdot l_1$ . Επιπλέον ορίστηκε η συχνότητα  $f_0 = \frac{c}{n \cdot l_1}$ .



Συνάρτηση μεταφοράς του πρώτου φίλτρου

Συνάρτηση μεταφοράς του δεύτερου φίλτρου

Συνάρτηση μεταφοράς της διάταξης

Αν ισχύει  $l_1/l_2=k/m$ , τότε

- Το πρώτο φίλτρο παρουσιάζει μέγιστο στα σημεία

$$f_1 = i \cdot \frac{c}{2 \cdot n \cdot l_1}, i = 0, 1, \dots$$

- Το δεύτερο φίλτρο παρουσιάζει μέγιστο στα σημεία

$$f_2 = j \cdot \frac{c}{2 \cdot n \cdot l_2} = j \cdot \frac{k}{m} \cdot \frac{c}{2 \cdot n \cdot l_1}, j = 0, 1, \dots$$

Άρα τα κοινά μέγιστα υπάρχουν για  $i, j$  που ικανοποιούν τη σχέση:

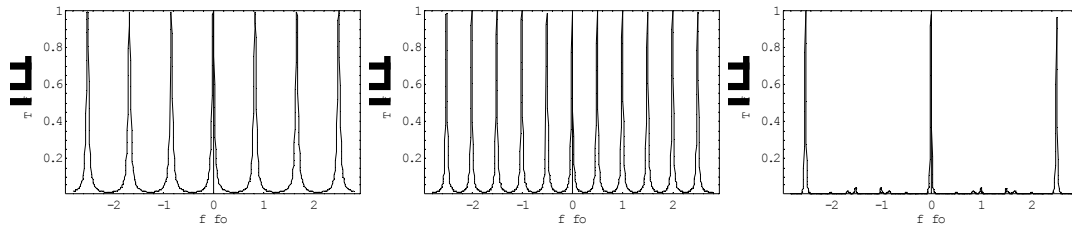
$$i \cdot m = j \cdot k$$

Για να είναι ο  $i$  ακέραιος θα πρέπει ο  $j$  να είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του  $m$ . Έτσι προκύπτει ότι η συνολική συνάρτηση μεταφοράς της διάταξης θα είναι μη μηδενική μόνο γύρω από τις συχνότητες:

$$f_q = q \cdot k \cdot \frac{c}{2 \cdot n \cdot l_1}, q = 0, 1, \dots$$



Επομένως  $FSR = k \cdot FSR_1 = m \cdot FSR_2$ . Ενδεικτικά σχεδιάζεται η συνάρτηση μεταφοράς για  $k=3, m=5$  ( $R=0.8$ ):



Συνάρτηση μεταφοράς του πρώτου φίλτρου

Συνάρτηση μεταφοράς του δεύτερου φίλτρου

Συνάρτηση μεταφοράς της διάταξης

### Άσκηση Α.1.3

Υποθέστε ότι γραμμικά πολωμένο φως συζευγνύεται σε διπλοθλαστική ίνα με γωνία πόλωσης  $45^\circ$  ως προς τους άξονες της ίνας. Η ίνα έχει σταθερές διάδοσης  $\beta_x$  και  $\beta_y$  για τους δυο άξονες και μήκος  $L$ . Στην έξοδο της ίνας υπάρχει πολωτής τοποθετημένος επίσης στις  $45^\circ$  ως προς τους άξονες της ίνας. Δείξτε ότι η διάταξη λειτουργεί σαν φίλτρο και υπολογίστε τη συνάρτηση μεταφοράς του, καθώς και την ελεύθερη φασματική περιοχή του.

### Λύση

Έστω ότι στην είσοδο της ίνας έχουμε το γραμμικά πολωμένο φως

$$\mathbf{E}^{in} = e^{-j\omega t} \cdot \hat{p}$$

Το μοναδιαίο διάνυσμα  $\hat{p}$  μπορεί να αναλυθεί στους άξονες της ίνας ως  $\hat{p} = \frac{\hat{x} + \hat{y}}{\sqrt{2}}$ , οπότε στην είσοδο της ίνας τα πεδία  $x$  και  $y$  γράφονται:

$$E_x = E_y = \frac{e^{-j\omega t}}{\sqrt{2}}$$

Μετά τη διάδοση σε μήκος  $L$  διπλοθλαστικής ίνας εισάγεται σε κάθε πόλωση μεταβολή φάσης, που εξαρτάται από τον δείκτη διάθλασης του αντίστοιχου άξονα. Άρα στην έξοδο της ίνας τα σήματα είναι:

$$E_x = \frac{e^{-j(\omega t - \beta_x \cdot L)}}{\sqrt{2}} \quad \text{και} \quad E_y = \frac{e^{-j(\omega t - \beta_y \cdot L)}}{\sqrt{2}}$$

$$\text{με } \beta_{x,y} = \frac{\omega}{c} \cdot n_{x,y}$$

Το διανυσματικό άθροισμα των παραπάνω σημάτων στον τελικό πολωτή θα δώσει:

$$\mathbf{E}^{\text{out}} = \frac{E_x + E_y}{\sqrt{2}} \cdot \hat{\mathbf{p}} = \frac{e^{-j(\omega t - \beta_x \cdot L)} + e^{-j(\omega t - \beta_y \cdot L)}}{2} \cdot \hat{\mathbf{p}}$$

Η συνάρτηση μεταφοράς της διάταξης είναι:

$$T(\omega) = \left| \frac{\mathfrak{I}\{E^{\text{out}}\}}{\mathfrak{I}\{E^{\text{in}}\}} \right|^2 = \left| \frac{\frac{1}{2} \cdot (e^{-j(\omega t - \beta_x \cdot L)} + e^{-j(\omega t - \beta_y \cdot L)})}{e^{-j\omega t}} \right|^2 = \cos^2 \left( \frac{(\beta_x - \beta_y) \cdot L}{2} \right) \Rightarrow$$

$$T(f) = \cos^2 \left( \frac{\pi \cdot f \cdot L}{c} \cdot (n_x - n_y) \right)$$

Για να υπολογιστεί η ελεύθερη φασματική περιοχή βρίσκουμε την απόσταση μεταξύ των μεγίστων της συνάρτησης μεταφοράς:

$$\begin{aligned} T(f) = \max &\Rightarrow \cos^2 \left( \frac{\pi \cdot f_{\max} \cdot L}{c} \cdot (n_x - n_y) \right) = 1 \Rightarrow \frac{\pi \cdot f_{\max} \cdot L}{c} \cdot (n_x - n_y) = k \cdot \pi \Rightarrow \\ &\Rightarrow f_{\max} = \frac{c}{L \cdot (n_x - n_y)} \cdot k, \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } \text{FSR} = \Delta f_{\max} = \frac{c}{L \cdot (n_x - n_y)}.$$

Επιπλέον μπορούμε να βρούμε το εύρος ζώνης ημίσειας ισχύος στα σημεία, όπου η συνάρτηση μεταφοράς πέφτει στο μισό:

$$T(f) = 1/2 \Rightarrow \cos^2 \left( \frac{\pi \cdot f_{1/2} \cdot L}{c} \cdot (n_x - n_y) \right) = 1/2 \Rightarrow \frac{\pi \cdot f_{1/2} \cdot L}{c} \cdot (n_x - n_y) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow f_{1/2} = \frac{c}{4 \cdot L \cdot (n_x - n_y)}$$

$$\text{Άρα } \text{FWHM} = 2 \cdot f_{1/2} = \frac{c}{2 \cdot L \cdot (n_x - n_y)}.$$

Με βάση τα παραπάνω υπολογίζεται η λεπτότητα του φίλτρου  $F = \frac{\text{FSR}}{\text{FWHM}} = 2$ .

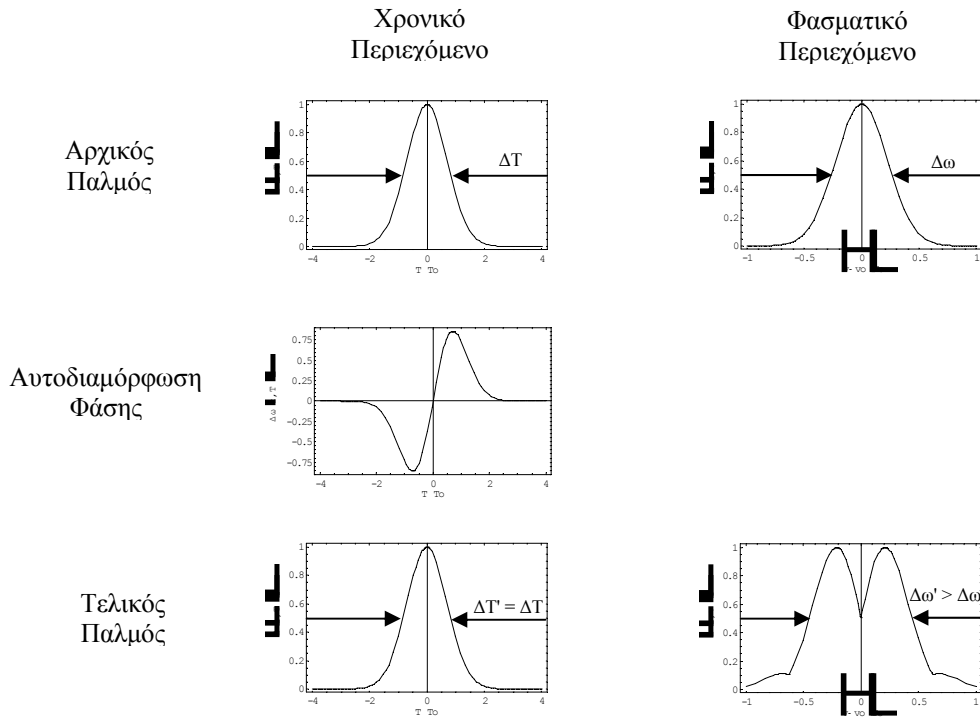
## Α.2 ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΕ ΔΙΑΣΠΟΡΑ, ΑΥΤΟΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΚΑΙ ΕΤΕΡΟΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΦΑΣΗΣ

### Άσκηση Α.2.1

Περιγράψτε το φαινόμενο της αυτοδιαμόρφωσης φάσης σε οπτικές ίνες. Περιγράψτε τι θα συμβεί στις περιπτώσεις (α) ίνας με μηδενική διασπορά, (β) ίνας με θετική διασπορά, (γ) ίνας με αρνητική διασπορά και (δ) ίνας με μηδενική διασπορά, στην έξοδο της οποίας έχει τοποθετηθεί φίλτρο. Εστιάστε την περιγραφή σας στη μεταβολή του πεδίου και της φάσης του οπτικού παλμού στο πεδίο του χρόνου και της συχνότητας. Κάνετε χρήση διαγραμμάτων για διευκόλυνση της περιγραφής σας.

### Λύση

(α) Ίνα με μηδενική διασπορά

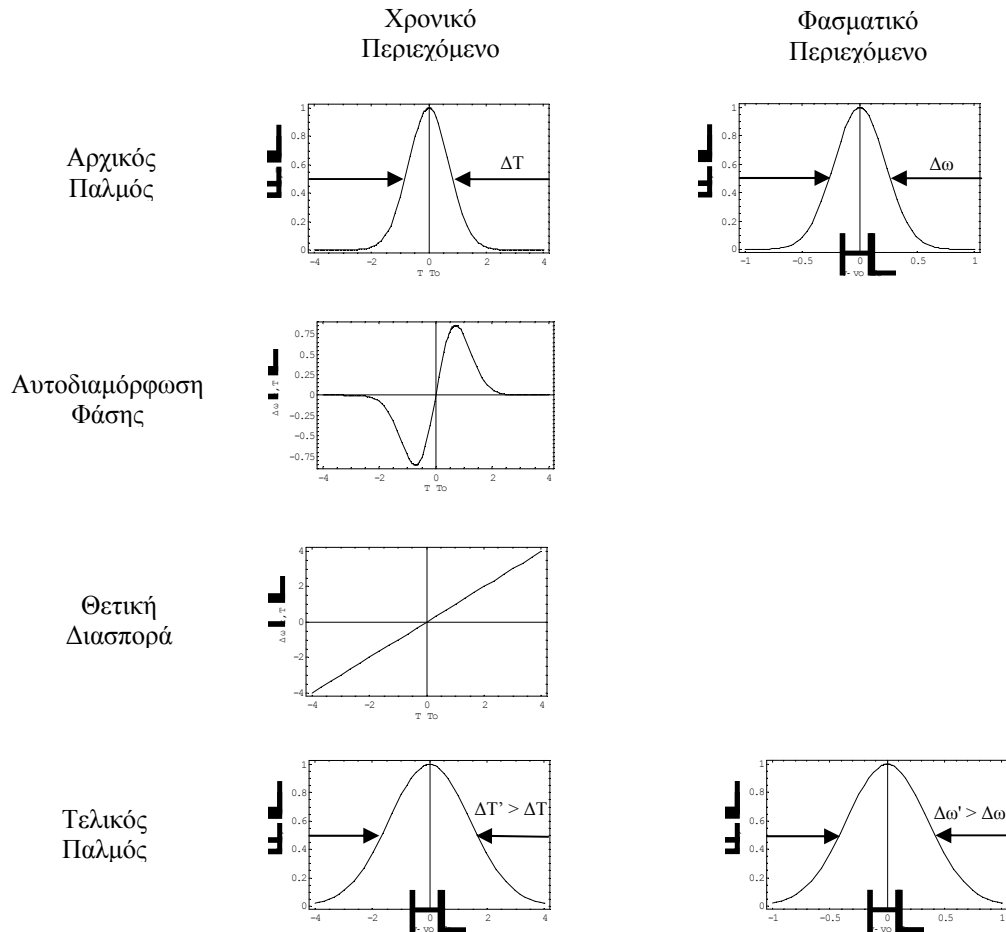


Σε περίπτωση που η ίνα έχει μηδενική διασπορά και δρα μόνο το φαινόμενο της αυτοδιαμόρφωσης φάσης αυξάνει το φάσμα του παλμού (λόγω της μη γραμμικής φάσης που εισάγεται), ενώ το χρονικό περιεχόμενο του παλμού δε μεταβάλλεται. Υπενθυμίζεται ότι ισχύουν οι σχέσεις:

$$\phi_{NL}(z, T) \approx |E(0, T)|^2 \text{ και } |E(z, T)| = |E(0, T)| \text{ στην περίπτωση μηδενικής διασποράς.}$$

Να σημειωθεί ότι η δράση του φαινομένου της αυτοδιαμόρφωσης φάσης θα προκαλέσει τη δημιουργία red-shifted συνιστωσών στο προπορευόμενο τμήμα του παλμού και blue-shifted συνιστωσών στο τμήμα που ακολουθεί.

(β) *Για με θετική διασπορά*

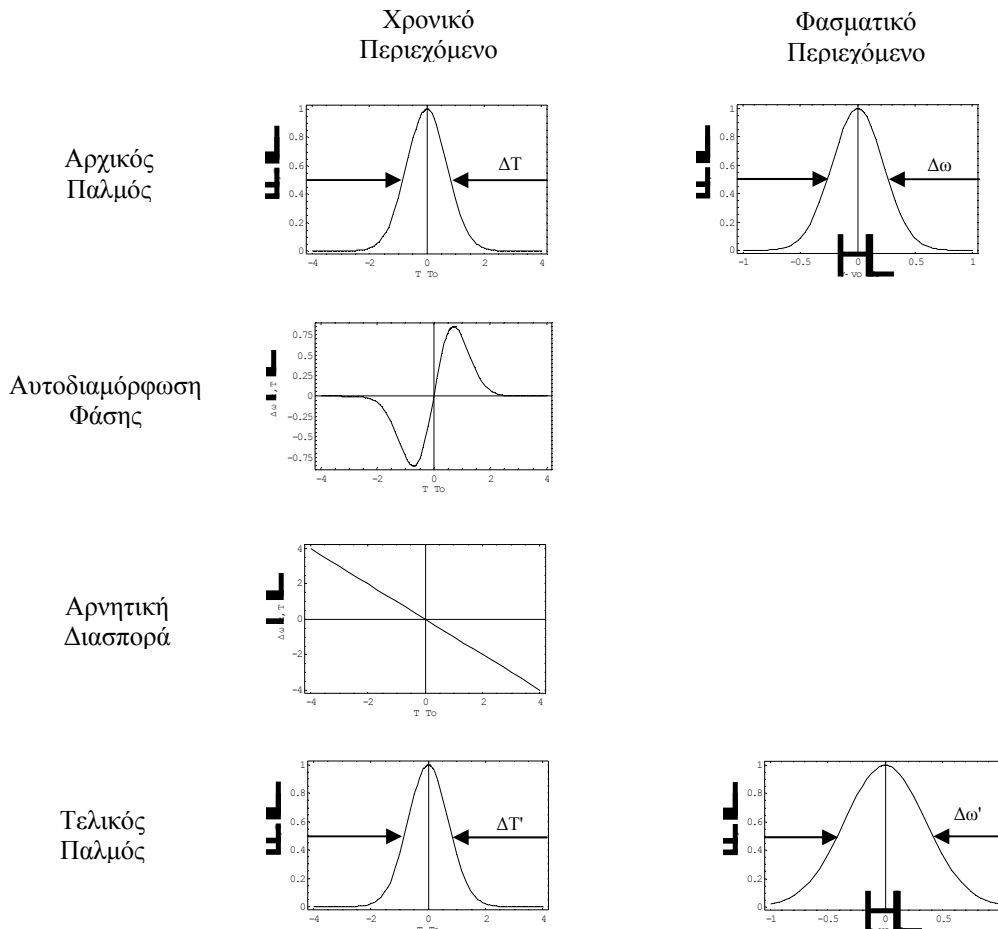


Σε αυτή την περίπτωση, οι red-shifted συνιστώσες που παράγονται στο προπορευόμενο τμήμα του παλμού (λόγω αυτοδιαμόρφωσης φάσης) διαδίδονται γρήγορα λόγω της θετικής διασποράς, ενώ οι blue-shifted συνιστώσες στο πίσω μέρος διαδίδονται πιο αργά. Αυτό έχει ως πρώτο αποτέλεσμα την ισχυρότατη διασπορά του παλμού. Σε δεύτερο στάδιο, η ταχεία κατάρρευση του παλμού οδηγεί σε εξασθένιση του μη γραμμικού φαινομένου, το οποίο είναι ισχυρό εκεί που ο παλμός έχει μεγάλη ισχύ ( $\phi_{NL}(z, T) \approx |E(0, T)|^2$ ). Άρα:

- Ο παλμός διευρύνεται στο χρόνο πιο ισχυρά από ότι όταν δρα μόνη της η διασπορά.
- Το φάσμα του παλμού στην έξοδο της ίνας είναι διευρυμένο, όμως όχι όσο στην περίπτωση που δρα μόνο η μη γραμμικότητα.

(γ) *Για με αρνητική διασπορά*

Σε αυτή την περίπτωση, οι red-shifted συνιστώσες που παράγονται στο προπορευόμενο τμήμα του παλμού διαδίδονται αργά, ενώ οι blue-shifted συνιστώσες στο πίσω μέρος διαδίδονται γρήγορα. Ως αποτέλεσμα ο ρυθμός με τον οποίο διευρύνεται ο παλμός είναι τώρα μικρότερος από ότι στην υποθετική κατάσταση που θα δρούσε μόνο η διασπορά.

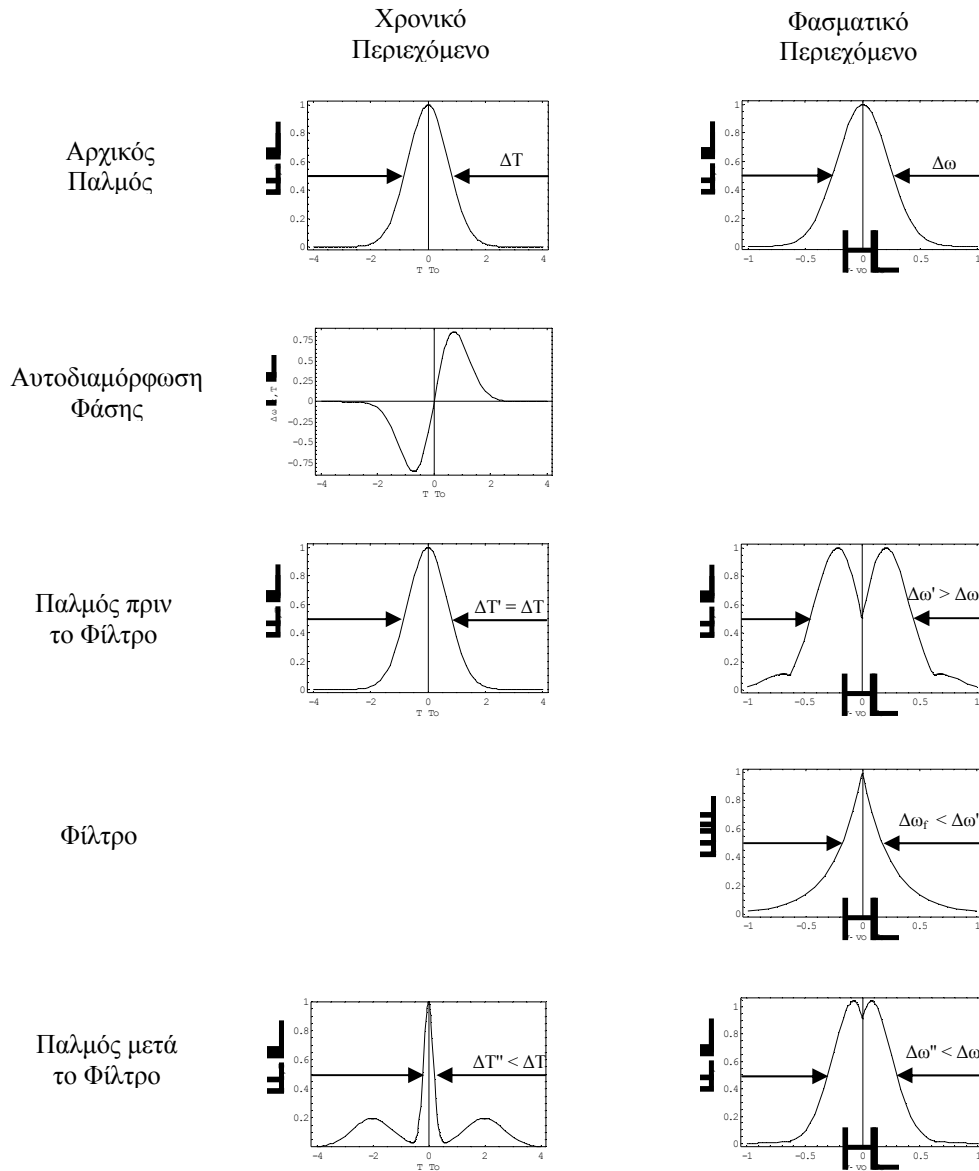


Έτσι σε αντίθεση με την προηγούμενη περίπτωση η μη γραμμικότητα περιορίζει το ρυθμό κατάρρευσης. Πάντως δε μπορούμε να πούμε τι συμβαίνει γενικά στο χρονικό και το φασματικό περιεχόμενο. Σε μια τέτοια περίπτωση θα πρέπει να λυθεί αριθμητικά η μη γραμμική εξίσωση διάδοσης.

(δ) *Για με μηδενική διασπορά στην έξοδο της οποίας τοποθετείται φίλτρο*

Η μη γραμμικότητα θα αυξήσει το φασματικό περιεχόμενο του παλμού, και κατά τα γνωστά οι χαμηλές συχνότητες θα βρίσκονται στο μπροστά μέρος του παλμού, ενώ οι υψηλές συχνότητες θα βρίσκονται στο πίσω μέρος. Ένα ζωνοπερατό φίλτρο θα "κόψει" τις πιο υψηλές και πιο χαμηλές συχνότητες, δηλαδή τμήματα του παλμού τα οποία αντιστοιχούν σε τέτοιες αποκλίσεις  $\Delta\omega$  από την φέρουσα.

Αποτέλεσμα (πλην του φασματικού περιορισμού) είναι και ο χρονικός περιορισμός, με ενδεχόμενη εμφάνιση πλευρικών παλμών (**προσοχή**: οι μέγιστες μεταβολές της συχνότητας από τη φέρουσα δε βρίσκονται κατ' ανάγκη στα άκρα του παλμού).



## Άσκηση Α.2.2

Περιγράψτε το φαινόμενο της διασποράς σε μονορυθμικές οπτικές ίνες. Διαχωρίστε τις περιπτώσεις ινών που παρουσιάζουν (α) ομαλή και (β) ανώμαλη διασπορά, με την προϋπόθεση ότι δεν παρουσιάζουν φαινόμενα απώλειας ή μη-γραμμικότητας. Εστιάστε την περιγραφή σας στη μεταβολή του πεδίου και της φάσης του οπτικού παλμού στο πεδίο του χρόνου και της συχνότητας. Κάνετε χρήση εξισώσεων και διαγραμμάτων για διευκόλυνση της περιγραφής σας.

### Λύση

Η διασπορά σε μονορυθμικές ίνες προκύπτει από δύο παράγοντες:

- Διασπορά υλικού

Η διασπορά υλικού οφείλεται στην εξάρτηση του δείκτη διάθλασης από τη συχνότητα σύμφωνα με τη σχέση Sellmeier  $n^2(\omega) = 1 + \sum_{j=1}^m B_j \cdot \frac{\omega_j^2}{\omega_j^2 - \omega^2}$ . Λόγω αυτής

της εξάρτησης η σταθερά διάδοσης  $k(\omega) = n(\omega) \cdot \frac{\omega}{c}$  εξαρτάται επίσης από τη συχνότητα, αλλά με μη γραμμικό τρόπο (κατά τα γνωστά, για να μην υπάρχει διασπορά θα πρέπει η σταθερά διάδοσης να είναι γραμμική συνάρτηση της συχνότητας).

Με βάση τα παραπάνω, μπορεί ναδειχθεί ότι η ταχύτητα ομάδας εξαρτάται από τη συχνότητα ως:

$$\frac{1}{v_g^{\text{ch}}} = \frac{\partial k(\omega)}{\partial \omega} = \frac{1}{c} \cdot \left( n(\omega) + \omega \cdot \frac{dn(\omega)}{d\omega} \right)$$

Η εξάρτηση της ταχύτητας ομάδας από τη συχνότητα προκαλεί τη διάδοση των διαφόρων φασματικών συνιστωσών ενός παλμού σε διαφορετικές ταχύτητες, γεγονός το οποίο συνιστά τη διασπορά.

- Διασπορά κυματοδηγού

Λόγω της κυματοδότησης, η σταθερά διάδοσης στην ίνα  $\beta(\omega)$  είναι διαφορετική από αυτή του ελευθέρου χώρου  $k(\omega)$ . Η διαφορά αυτή είναι εξαρτώμενη από τη συχνότητα, με αποτέλεσμα να υπάρχει μια επιπλέον συνιστώσα διασποράς

$$\frac{1}{v_g^{\text{tot}}} = \frac{\partial \beta(\omega)}{\partial \omega} = \frac{\partial}{\partial \omega} (k(\omega) + d(\omega)) = \frac{1}{v_g^{\text{ch}}} + \frac{1}{v_g^{\text{wav}}}.$$

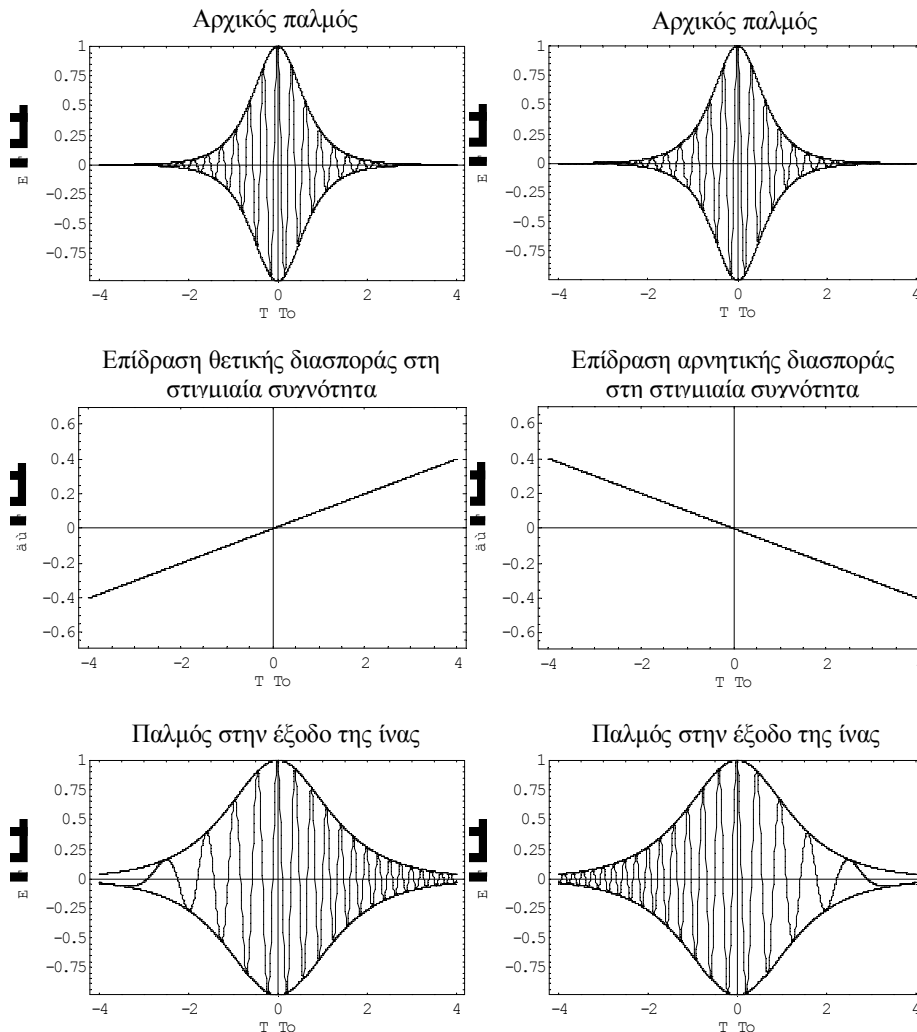
Αποτέλεσμα της διασποράς είναι να εμφανίζεται μια χρονική διαπλάτυνση του παλμού που ταξιδεύει στην ίνα. Το φασματικό περιεχόμενο του παλμού δεν αλλάζει, αφού αν και οι διάφορες χρωματικές συνιστώσες ταξιδεύουν με διαφορετική ταχύτητα, η ισχύς του καθενός από τα “κυματοπακέτα” που συγκροτούν τον παλμό μένει σταθερή.

(α) Ομαλή διασπορά

Στην ομαλή διασπορά ( $\beta_2 > 0$ ), οι χαμηλές συχνότητες ταξιδεύουν πιο γρήγορα από τις υψηλές. Αποτέλεσμα είναι ο παλμός να εμφανίζει μια διαμόρφωση της φέρουσάς του όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, το οποίο παρουσιάζει ποιοτικά την επίδραση της διασποράς σε έναν παλμό με περιβάλλουσα  $U(T) = \text{sech}(T/T_0)$ .

(β) Ανώμαλη διασπορά

Στην ανώμαλη διασπορά ( $\beta_2 < 0$ ), οι χαμηλές συχνότητες ταξιδεύουν πιο αργά από τις υψηλές. Αποτέλεσμα είναι ο παλμός να εμφανίζει μια διαμόρφωση της φέρουσάς του όπως φαίνεται στο σχήμα:





### Άσκηση A.2.3

(α) Ορίζουμε σε έναν παλμό το χρονικό εύρος ημίσειας ισχύος  $\Delta T_{1/2}$ , ως το εύρος μέσα στο οποίο η ισχύς του παλμού πέφτει στο μισό. Ομοίως ορίζουμε το φασματικό εύρος ημίσειας ισχύος  $\Delta f_{1/2}$ , ως το εύρος μέσα στο οποίο το μέτρο της φασματικής πυκνότητας ισχύος πέφτει στο μισό. Να βρεθεί το γινόμενο  $\Delta T_{1/2} \cdot \Delta f_{1/2}$  για παλμό Gauss

$$E(T) = \exp\left(-\frac{T^2}{2 \cdot T_0^2}\right).$$

(β) Ένας παλμός για τον οποίο ισχύει  $\Delta T_{1/2} \cdot \Delta f_{1/2} = \min$  ονομάζεται transform limited.

Ποιοι είναι οι λόγοι για τους οποίους ένας παλμός δεν είναι transform limited ( $\Delta T_{1/2} \cdot \Delta f_{1/2} > \min$ );

(γ) Υποθέστε ότι ο παλμός της περίπτωσης (α) υφίσταται διασπορά. μετά τη διάδοση σε ίνα. Εξακολουθεί να είναι transform limited; Γιατί; Πώς μπορεί να αντισταθμιστεί η επίδραση της διασποράς;

(δ) Υποθέστε ότι ο παλμός της περίπτωσης (α) υφίσταται αυτοδιαμόρφωση φάσης μετά τη διάδοση σε ίνα. Εξακολουθεί να είναι transform limited; Γιατί; Πώς μπορεί να αντισταθμιστεί η επίδραση της αυτοδιαμόρφωσης φάσης;

(ε) Θέλουμε να συμπίεσουμε τον παλμό. Περιγράψτε τι θα συμβεί αν ο παλμός:

- Διαδοθεί πρώτα σε ίνα που προκαλεί διασπορά και μετά σε ίνα που εισάγει αυτοδιαμόρφωση φάσης.
- Διαδοθεί πρώτα σε ίνα που προκαλεί αυτοδιαμόρφωση φάσης και μετά σε ίνα που εισάγει διασπορά.

Δείξτε ότι μόνο στη δεύτερη υποπερίπτωση είναι δυνατόν να συμπεστεί ο παλμός. Ποιο είναι το πρόσημο της διασποράς που πρέπει να έχει η ίνα ώστε να συμπεστεί ο παλμός;

### Λύση

(α) Το πεδίο είναι:

$$E(T) = \exp\left(-\frac{T^2}{2 \cdot T_0^2}\right)$$

και κατά συνέπεια η ισχύς του δίνεται από τη σχέση:

$$P(T) = \exp\left(-\frac{T^2}{T_0^2}\right)$$

Για να υπολογίσουμε το χρονικό εύρος ημίσειας ισχύος βρίσκουμε τότε η ισχύς πέφτει στο μισό:

$$P(T) = \frac{P(0)}{2} \Rightarrow \exp\left(-\frac{T^2}{T_0^2}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow T_{1/2} = T_0 \cdot \sqrt{\ln 2}. \text{ Άρα } \Delta t_{1/2} = 2 \cdot T_{1/2} = T_0 \cdot 2 \cdot \sqrt{\ln 2}.$$

Επιπλέον χρειαζόμαστε τον μετασχηματισμό Fourier του πεδίου. Με βάση τις γνωστές ιδιότητες:

$$\mathfrak{F}\{\exp(-\pi \cdot t^2)\} = \exp(-\pi \cdot f^2) \text{ και } \mathfrak{F}\{g(a \cdot T)\} = \frac{1}{a} \cdot G\left(\frac{f}{a}\right)$$

υπολογίζουμε για  $a = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot T_0}$  ότι:

$$\mathfrak{F}\left\{\exp\left(-\frac{T^2}{2 \cdot T_0^2}\right)\right\} = \sqrt{2\pi} \cdot T_0 \cdot \exp(-2 \cdot \pi^2 \cdot T_0^2 \cdot f^2)$$

Άρα η πυκνότητα φάσματος ισχύος είναι:

$$S(f) = \left| \sqrt{2\pi} \cdot T_0 \cdot \exp(-2 \cdot \pi^2 \cdot T_0^2 \cdot f^2) \right|^2 = 2\pi \cdot T_0^2 \cdot \exp(-4 \cdot \pi^2 \cdot T_0^2 \cdot f^2).$$

Όμοια με το χρονικό εύρος ημίσειας ισχύος, θα πρέπει να ισχύει για το φασματικό εύρος:

$$X(f) = \frac{X(0)}{2} \Rightarrow \exp(-4 \cdot \pi^2 \cdot T_0^2 \cdot f^2) = \frac{1}{2} \Rightarrow f_{1/2} = \frac{\sqrt{\ln 2}}{2 \cdot \pi \cdot T_0}. \text{ Άρα } \Delta f_{1/2} = 2 \cdot f_{1/2} = \frac{\sqrt{\ln 2}}{\pi \cdot T_0}.$$

$$\text{Άρα } \Delta T_{1/2} \cdot \Delta f_{1/2} = \frac{2 \cdot \ln 2}{\pi}.$$

(β) Οι λόγοι για τους οποίους ένας παλμός δεν είναι transform limited είναι η χρονική εξάπλωση ( $\Delta T_{1/2} > \Delta T_{1/2}^{\min}$ ) και/ή η φασματική διεύρυνση ( $\Delta f_{1/2} > \Delta f_{1/2}^{\min}$ ). Συνοπτικά:

- Χρονική διεύρυνση έχουμε σε περίπτωση διασποράς.
- Φασματική διεύρυνση έχουμε σε περίπτωση αυτοδιαμόρφωσης ή ετεροδιαμόρφωσης φάσης SPM/XPM.
- Χρονική και φασματική διεύρυνση έχουμε σε περίπτωση συνδυασμένης δράσης SPM/XPM και ομαλής διασποράς.

(γ) Όπως ήδη αναφέρθηκε σε περίπτωση διασποράς  $\Delta T_{1/2} > \Delta T_{1/2}^{\min}$ , άρα ο παλμός δεν είναι transform limited. Για να αντισταθμιστεί η διασπορά θα πρέπει ο παλμός να διαδοθεί σε ένα με αντίθετο πρόσημο της παραμέτρου  $\beta_2$ . Έτσι, οι προπορευόμενες χρωματικές συνιστώσες θα καθυστερήσουν και οι υπολειπόμενες θα επιταχυνθούν, με αποτέλεσμα την συμπίεση του παλμού στο αρχικό του εύρος.

(δ) Ομοίως σε περίπτωση αυτοδιαμόρφωσης φάσης ισχύει  $\Delta f_{1/2} > \Delta f_{1/2}^{\min}$ , άρα ο παλμός δεν είναι transform limited. Σε αντίθεση όμως με την περίπτωση της διασποράς, η αυτοδιαμόρφωση φάσης είναι μη αναστρέψιμη (δεν είναι δυνατόν οι φασματικές συνιστώσες που γεννά το μη γραμμικό φαινόμενο να “αναιρεθούν”).

(ε) Αν ο παλμός περάσει μέσα από ίνα με διασπορά τότε θα διευρυνθεί χρονικά. Αν περάσει έπειτα από μη γραμμική ίνα, τότε απλώς θα δημιουργηθούν νέες φασματικές συνιστώσες (αν η διασπορά δεν είναι πολύ μεγάλη και υπάρχει αρκετή ισχύς κορυφής, ώστε να διεγερθεί η μη γραμμικότητα), δε θα αναιρεθεί όμως η χρονική διεύρυνση του παλμού. Ουσιαστικά μετά την πρώτη ίνα θα ισχύει  $\Delta T_{1/2} > \Delta T_{1/2}^{\min}$  και μετά τη δεύτερη ίνα

θα ισχύουν  $\Delta T_{1/2} > \Delta T_{1/2}^{\min}, \Delta f_{1/2} > \Delta f_{1/2}^{\min}$ .

Αντίθετα, αν ο παλμός περάσει πρώτα από τη μη γραμμικότητα, τότε θα ισχύει  $\Delta f_{1/2} > \Delta f_{1/2}^{\min}$ . Αν βρεθεί κάποια διάταξη που να μετατρέψει τον παλμό εξόδου σε transform limited, τότε αυτόματα θα επιτευχθεί συμπίεση, καθώς θα πρέπει αναγκαστικά να ισχύει  $\Delta T_{1/2} < \Delta T_{1/2}^{\min}$ . Η διάταξη αυτή είναι μια ίνα με αρνητική διασπορά. Με αυτή την ίνα οι “red-shifted” συνιστώσες (που γεννήθηκαν από τη μη γραμμικότητα) στο εμπρός μέρος του non transform limited παλμού θα διαδίδονται με μικρότερη ταχύτητα από τις “blue-shifted” στο πίσω μέρος. Έτσι επιτυγχάνεται συμπίεση.

#### **Άσκηση A.2.4**

Βρείτε το βέλτιστο εύρος  $T_0$  ενός Gaussian παλμού που διαδίδεται σε μήκος ίνας  $z$  με διασπορά  $\beta_2$ . Ως βέλτιστο εύρος  $T_0$  θεωρείται αυτό για το οποίο το χρονικό εύρος ημίσειας ισχύος του παλμού στην έξοδο της ίνας γίνεται ελάχιστο.

#### **Λύση**

Η εξίσωση διάδοσης της περιβάλλουσας του παλμού (αγνοώντας τα μη γραμμικά φαινόμενα) γράφεται:

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{i}{2} \cdot \beta_2 \cdot \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} = 0$$

Παίρνοντας τον μετασχηματισμό Fourier της περιβάλλουσας  $\tilde{A}$  η εξίσωση μπορεί να γραφεί ως:

$$\frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} - \frac{i}{2} \cdot \beta_2 \cdot \omega^2 \cdot \tilde{A} = 0.$$

Η γενική λύση της τελευταίας είναι:

$$\tilde{A}(z, \omega) = \tilde{A}(0, \omega) \cdot \exp\left(\frac{i}{2} \cdot \omega^2 \cdot \beta_2 \cdot z\right) \quad \text{ή} \quad \tilde{A}(z, f) = \tilde{A}(0, f) \cdot \exp(i \cdot 2\pi^2 \cdot \beta_2 \cdot z \cdot f^2).$$

Θεωρώντας αρχικό παλμό

$$A(0, T) = \exp\left(-\frac{T^2}{2 \cdot T_0^2}\right)$$

με μετασχηματισμό  $\tilde{A}(0, f) = \sqrt{2\pi} \cdot T_0 \cdot \exp(-2 \cdot \pi^2 \cdot T_0^2 \cdot f^2)$  προκύπτει ότι:

$$\tilde{A}(z, f) = \sqrt{2\pi} \cdot T_0 \cdot \exp(-2\pi^2 \cdot (T_0^2 - i \cdot \beta_2 \cdot z \cdot f^2))$$

Η αντιστροφή στο πεδίο του χρόνου (βλ. άσκηση A.2.3 με  $a = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot (T_0^2 - i \cdot \beta_2 \cdot z)}}$ ),

δίνει τον παλμό μετά την διάδοσή του σε απόσταση  $z$ :

$$A(z, T) = \frac{T_0}{\sqrt{T_0^2 - i \cdot \beta_2 \cdot z}} \cdot \exp\left(-\frac{T^2}{2 \cdot (T_0^2 - i \cdot \beta_2 \cdot z)}\right)$$

Η ισχύς του παλμού είναι:

$$P(z, T) = |A(z, T)|^2 = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\beta_2 \cdot z}{T_0^2}\right)^2}} \cdot \exp\left(-\frac{T^2}{T_0^2 + \left(\frac{\beta_2 \cdot z}{T_0}\right)^2}\right)$$

Κατά τα γνωστά:

$$\Delta T_{1/2} = \sqrt{T_0^2 + \left(\frac{\beta_2 \cdot z}{T_0}\right)^2} \cdot 2 \cdot \sqrt{\ln 2}$$

Το ελάχιστο εύρος υπολογίζεται για:

$$\Delta T_{1/2} = \min \Rightarrow \frac{\partial \Delta T_{1/2}}{\partial T_0} = 0 \Rightarrow \frac{2 \cdot T_0 - 2 \cdot \frac{(\beta_2 \cdot z)^2}{T_0^3}}{2 \cdot \sqrt{T_0^2 + \left(\frac{\beta_2 \cdot z}{T_0}\right)^2}} \cdot 2 \cdot \sqrt{\ln 2} = 0 \Rightarrow T_0^4 = (\beta_2 \cdot z)^2 \Rightarrow T_0 = \sqrt{\beta_2 \cdot z}$$

Τότε το εύρος του παλμού γίνεται:

$$\Delta T_{1/2} = 2 \cdot \sqrt{\ln 2} \cdot \sqrt{2 \cdot \beta_2 \cdot z}.$$

### Άσκηση A.2.5

Μη-γραμμικοί παλμοί σε μονορυθμικές ίνες: Υπολογίστε την ισχύ κορυφής  $P_p$  που χρειάζεται ένας παλμός, ώστε να μεταδίδεται χωρίς μεταβολή, δηλαδή η διασπορά της ίνας να αντισταθμίζεται από την αυτοδιαμόρφωση φάσης σε απειροελάχιστο βήμα μετάδοσης  $\delta z$ .

(α) Υποθέστε ότι ο παλμός είναι γκαουσιανής μορφής:  $E(t) = \sqrt{P_p} \cdot \exp\left(-t^2/2 \cdot T_0^2\right)$ .

(β) Για τον υπολογισμό της στιγμιαίας αλλαγής φάσης λόγω αυτοδιαμόρφωσης χρησιμοποιείτε τη σχέση  $\Delta\phi(t, \delta z) = \frac{2\pi \cdot n_2 \cdot P(t) \cdot \delta z}{\lambda \cdot A_{\text{eff}}}$ .

Υπολογίστε την ισχύ κορυφής  $P_p$ , που χρειάζεται για έναν παλμό εύρους 1 ps, σε μια standard single mode ίνα που έχει  $\beta_2 = -20 \text{ ps}^2/\text{km}$  και  $A_{\text{eff}} = 100 \mu\text{m}^2$ . Το μήκος κύματος του παλμού είναι  $\lambda = 1.5 \mu\text{m}$  και  $n_2 = 3.2 \cdot 10^{-20} \text{ m}^2/\text{W}$ .

### Λύση

Θεωρώντας ένα πλαίσιο παρατήρησης που διαδίδεται μαζί με τον παλμό στην ίνα

$$T = t - \frac{z}{v_g}$$

μπορούμε να υπολογίσουμε τα ακόλουθα τόσο για μη-γραμμικό, όσο και για το γραμμικό φαινόμενο:

- Μη γραμμικότητα : Ισχύει ότι σε απόσταση  $z$  ο παλμός έχει αποκτήσει μη γραμμική φάση

$$\phi_{\text{NL}}(z, T) = \frac{2\pi \cdot n_2}{\lambda \cdot A_{\text{eff}}} \cdot P(0, T) \cdot z$$

και επειδή  $P(0, T) = |E(0, T)|^2 = P_p \cdot \exp\left(-\frac{T^2}{T_0^2}\right)$

εύκολα αποδεικνύεται ότι η μεταβολή της μη γραμμικής φάσης σε απόσταση  $\delta z$  είναι:

$$\Delta\phi_{\text{NL}}(z, T) = \frac{2\pi \cdot n_2}{\lambda \cdot A_{\text{eff}}} \cdot P(0, T) \cdot \delta z = \frac{2\pi \cdot n_2}{\lambda \cdot A_{\text{eff}}} \cdot P_p \cdot \exp\left(-\frac{T^2}{T_0^2}\right) \cdot \delta z.$$

- Διασπορά: Σε απόσταση  $z$  το πεδίο αποδεικνύεται (βλ. άσκηση A.2.3) ότι έχει τη μορφή

$$E(z, T) = \sqrt{P_p} \cdot \frac{T_0}{\sqrt{T_0^2 - i \cdot \beta_2 \cdot z}} \cdot \exp\left(-\frac{T^2}{2 \cdot (T_0^2 - i \cdot \beta_2 \cdot z)}\right)$$

Η φάση του παλμού λόγω διασποράς μπορεί να γραφτεί ως:

$$\phi_L(z, T) = \tan^{-1}\left(\frac{z}{L_D}\right) - \frac{\text{sgn}(\beta_2) \cdot \frac{z}{L_D}}{1 + \left(\frac{z}{L_D}\right)^2} \cdot \frac{T^2}{2 \cdot T_0^2}$$

Παραγωγίζοντας την τελευταία σχέση ως προς  $z$ , βρίσκουμε τη μεταβολή της φάσης σε μια μικρή απόσταση  $\delta z$ :

$$\Delta\phi_L(z, T) = \frac{\frac{1}{L_D}}{1 + \left(\frac{z}{L_D}\right)^2} - \frac{\text{sgn}(\beta_2)}{L_D} \cdot \frac{1 - \left(\frac{z}{L_D}\right)^2}{\left(1 + \left(\frac{z}{L_D}\right)^2\right)^2} \cdot \frac{T^2}{2 \cdot T_0^2} \cdot \delta z$$

Για να αλληλοαναιρεθούν τα δύο φαινόμενα, θα πρέπει να είναι ίσες κατά απόλυτο τιμή οι κλίσεις των αποκλίσεων από τη φέρουσα συχνότητα  $\omega$  ( $\text{chirp}$ ). Δηλαδή θα πρέπει να ισχύει:

$$\left. \frac{\partial \omega_L(z, T)}{\partial T} \right|_{T=0} + \left. \frac{\partial \omega_{\text{NL}}(z, T)}{\partial T} \right|_{T=0} = 0$$

(αφού για παλμό Gauss το γραμμικό κομμάτι του  $\text{chirp}$  περιορίζεται κοντά στο σημείο  $T=0$ ).

Επειδή  $\delta\omega(z, T) = -\frac{\partial\Delta\phi(z, T)}{\partial T}$ , τελικά θα πρέπει να ισχύει:

$$\left. \frac{\partial^2\Delta\phi_L(z, T)}{\partial T^2} \right|_{T=0} + \left. \frac{\partial^2\Delta\phi_{NL}(z, T)}{\partial T^2} \right|_{T=0} = 0.$$

Αναλυτικά:

$$\bullet \left. \frac{\partial^2\Delta\phi_L(z, T)}{\partial T^2} \right|_{T=0} = -\frac{1 - \left(\frac{z}{L_D}\right)^2}{\left(1 + \left(\frac{z}{L_D}\right)^2\right)^2} \cdot \frac{\text{sgn}(\beta_2)}{L_D \cdot T_0^2} \cdot \delta z$$

$$\bullet \left. \frac{\partial^2\Delta\phi_{NL}(z, T)}{\partial T^2} \right|_{T=0} = -\frac{2\pi \cdot n_2}{\lambda \cdot A_{\text{eff}}} \cdot P_p \cdot \left( \left(\frac{2 \cdot T}{T_0^2}\right)^2 - \frac{2}{T_0^2} \right) \cdot \exp\left(-\frac{T^2}{T_0^2}\right) \cdot \delta z \Big|_{T=0} = -\frac{4\pi \cdot n_2}{\lambda \cdot A_{\text{eff}} \cdot T_0^2} \cdot P_p \cdot \delta z$$

Για να ισχύει η αλληλοαναίρεση των φαινομένων, θα πρέπει όλα τα παραπάνω να ισχύουν κατ'αρχήν για  $z=0$ . Άρα τελικά προκύπτει ότι χρειάζεται να ικανοποιείται η συνθήκη:

$$\frac{\text{sgn}(\beta_2)}{L_D \cdot T_0^2} \cdot \delta z = -\frac{4\pi \cdot n_2}{\lambda \cdot A_{\text{eff}} \cdot T_0^2} \cdot P_p \cdot \delta z \Rightarrow P_p = \frac{\lambda \cdot A_{\text{eff}} \cdot \beta_2}{4\pi \cdot n_2 \cdot T_0^2}$$

Αντικαθιστώντας προκύπτει ότι η απαιτούμενη ισχύς κορυφής είναι  $P_p = 7.5 \text{ W}$ .

### **Άσκηση Α.2.6**

(α) Αποδείξτε ότι μια διάταξη που αποτελείται από ένα 2x2 συζεύκτη οπτικών ινών, του οποίου οι έξοδοι έχουν συνδεθεί με ίνα, λειτουργεί σαν καθρέφτης για σήμα  $E^{\text{in}}$  που εισέρχεται στη είσοδο του συζεύκτη

(β) Υποθέστε ότι η διάταξη μετατρέπεται, ώστε μαζί με το αριστερόστροφα μεταδιδόμενο σήμα να συνταξιδεύει ένας παλμός ισχύος κορυφής  $P_p$ , ο οποίος προξενεί αλλαγή του δείκτη διάθλασης λόγω ετεροδιαμόρφωσης φάσης. Υπολογίστε την ισχύ  $P_p$  που χρειάζεται, ώστε το σήμα  $E^{\text{in}}$  να εξέλθει από τη δεύτερη είσοδο του συζεύκτη, αν το μήκος της ίνας είναι  $L$ .

## Λύση

(α) Έστω ότι το σήμα εισόδου είναι:

$$\mathbf{E}^{\text{in}} = E^{\text{in}} \cdot \frac{e^{-j\omega t}}{2} \cdot \hat{\mathbf{p}}$$

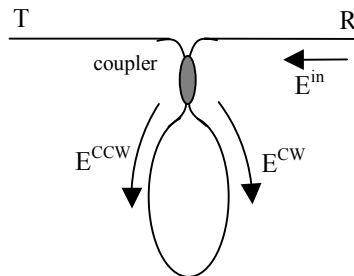
Στις δύο εξόδους του συζεύκτη θα εμφανιστούν το ωρολογιακά:

$$\mathbf{E}^{\text{CW}} = \sqrt{a} \cdot E^{\text{in}} \cdot \frac{e^{-j\omega t}}{2} \cdot \hat{\mathbf{p}}$$

και ανθωρολογιακά περιστρεφόμενο σήμα:

$$\mathbf{E}^{\text{CCW}} = \sqrt{1-a} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot E^{\text{in}} \cdot \frac{e^{-j\omega t}}{2} \cdot \hat{\mathbf{p}}$$

όπου  $a$  ο λόγος διαχωρισμού ισχύων του συζεύκτη, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα:



Τα δύο σήματα που τελικά θα εμφανιστούν στις θύρες R και T της διάταξης δίνονται από τις σχέσεις:

$$\mathbf{E}^{\text{R}} = \left( \sqrt{a} \cdot E^{\text{CCW}} + \sqrt{1-a} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot E^{\text{CW}} \right) \cdot E^{\text{in}} \cdot \frac{e^{-j\omega t}}{2} \cdot \hat{\mathbf{p}} = 2 \cdot \sqrt{a \cdot (1-a)} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot E^{\text{in}} \cdot \frac{e^{-j\omega t}}{2} \cdot \hat{\mathbf{p}}$$

και

$$\mathbf{E}^{\text{T}} = \left( \sqrt{a} \cdot E^{\text{CW}} + \sqrt{1-a} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot E^{\text{CCW}} \right) \cdot E^{\text{in}} \cdot \frac{e^{-j\omega t}}{2} \cdot \hat{\mathbf{p}} = (2 \cdot a - 1) \cdot E^{\text{in}} \cdot \frac{e^{-j\omega t}}{2} \cdot \hat{\mathbf{p}}$$

Αν θέλουμε να έχουμε τη μέγιστη ισχύ στη θύρα R τότε:



$$|\mathbf{E}^R| = \max \Rightarrow \frac{\partial}{\partial a} |\mathbf{E}^R| = 0 \Rightarrow \frac{1-2 \cdot a}{2 \cdot \sqrt{a \cdot (1-a)}} = 0 \Rightarrow a = 50\%$$

Σε αυτή την περίπτωση όλη η ισχύς περνά στη θύρα R, ενώ στη θύρα T δεν υπάρχει πεδίο (mirror coupler).

(β) Ομοίως, στις δύο εξόδους του συζεύκτη θα εμφανιστούν τα σήματα:

$$\mathbf{E}^{CW} = \sqrt{a} \cdot E^{in} \cdot \frac{e^{-j\omega t}}{2} \cdot \hat{p} \quad \text{και} \quad \mathbf{E}^{CCW} = \sqrt{1-a} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot E^{in} \cdot \frac{e^{-j\omega t}}{2} \cdot \hat{p}$$

Το ωρολογιακά διαδιδόμενο σήμα απλώς υφίσταται μια μεταβολή της φάσης του λόγω της μετάδοσης στην ίνα και εμφανίζεται στην έξοδο της ως:

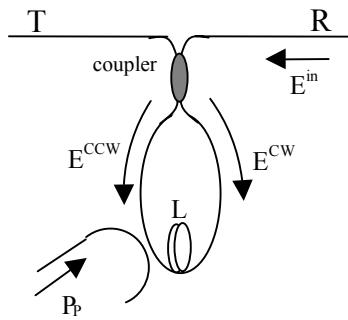
$$\mathbf{E}_f^{CW} = \sqrt{a} \cdot e^{-j\beta \cdot L} \cdot E^{in} \cdot \frac{e^{-j\omega t}}{2} \cdot \hat{p}$$

Το ανθωρολογιακά διαδιδόμενο σήμα υφίσταται μια επιπλέον μη γραμμική μεταβολή της φάσης του λόγω του ισχυρού σήματος ελέγχου

$$\mathbf{E}^P = E^P \cdot \frac{e^{-j\omega^* t}}{2} \cdot \hat{p}$$

Ως αποτέλεσμα, το πεδίο στην αντίστοιχη έξοδο της ίνας είναι:

$$\mathbf{E}_f^{CCW} = \sqrt{1-a} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-j(\beta \cdot L + \phi_{NL})} \cdot E^{in} \cdot \frac{e^{-j\omega t}}{2} \cdot \hat{p}.$$



Τώρα, τα πεδία στις θύρες R και T είναι αντιστοίχως της διάταξης θα είναι:

$$\mathbf{E}^R = \left( \sqrt{a} \cdot E_f^{CCW} + \sqrt{1-a} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot E_f^{CW} \right) \cdot E^{in} \cdot \frac{e^{-j\omega t}}{2} \cdot \hat{p} = \sqrt{a \cdot (1-a)} \cdot (1 + e^{-j\phi_{NL}}) \cdot e^{-j\left(\beta \cdot L + \frac{\pi}{2}\right)} \cdot E^{in} \cdot \frac{e^{-j\omega t}}{2} \cdot \hat{p}$$

$$\mathbf{E}^T = \left( \sqrt{a} \cdot E_f^{CW} + \sqrt{1-a} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot E_f^{CCW} \right) \cdot E^{in} \cdot \frac{e^{-j\omega t}}{2} \cdot \hat{\mathbf{p}} = (a + (a-1) \cdot e^{-j\phi_{NL}}) \cdot e^{-j\beta \cdot L} \cdot E^{in} \cdot \frac{e^{-j\omega t}}{2} \cdot \hat{\mathbf{p}}.$$

Αν θέλουμε όλο το σήμα να φεύγει από τη θύρα Γ τότε θα πρέπει  $1 + e^{-j\phi_{NL}} = 0 \Rightarrow \phi_{NL} = \pi$ .

Κατά τα γνωστά  $\phi_{NL} = \beta \cdot n_2 \cdot L \cdot 2 \cdot |\mathbf{E}^P|^2 = 16 \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \cdot n_2 \cdot L \cdot P_p$ , οπότε  $P_p = \frac{\lambda}{32 \cdot n_2 \cdot L}$ .