



ΦΩΤΟΝΙΚΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ ΓΙΑ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΕΣ

**Συνδυαστικές Ασκήσεις
Παθητικά στοιχεία - Πόλωση - Φίλτρα**

Ηρακλής Αβραμόπουλος

Photonics Communications Research Laboratory



Άσκηση 1

(α) Βρείτε την συνάρτηση μεταφοράς του Fabry-Perot φίλτρου. Συγκεκριμένα υπολογίστε τη συνάρτηση μεταφοράς τόσο ως προς το διαδιδόμενο πεδίο, όσο και ως προς το ανακλώμενο πεδίο. Υποθέστε ότι οι καθρέφτες του φίλτρου έχουν ανακλαστικότητα R , ενώ ανάμεσα στους καθρέπτες το υλικό μήκους l έχει δείκτη διάθλασης n

(β) Υπολογίστε την ελεύθερη φασματική περιοχή, το εύρος ζώνης ημίσειας ισχύος και την λεπτότητα του φίλτρου για μεγάλη τιμή της ανακλαστικότητας R . Που οφείλεται η μεγάλη λεπτότητα του φίλτρου (σε σχέση με το ΜΖΙ και το ΡΜ φίλτρο);



Άσκηση 1

(γ) Θεωρείστε δύο διαδοχικά Fabry-Perot φίλτρα, το ένα με μήκος l_1 και το άλλο με μήκος l_2 . Ποιά είναι η συνάρτηση μεταφοράς της διάταξης; Αν $l_1/l_2 = k/m$ (k και m πρώτοι μεταξύ τους) βρείτε την ελεύθερη φασματική περιοχή της διάταξης, σαν συνάρτηση της ελεύθερης φασματικής περιοχής καθενός από τα επιμέρους φίλτρα.



Άσκηση 1

Λύση

(α) Έστω ότι το προσπίπτον πεδίο στο πρώτο κάτοπτρο είναι:

$$\mathbf{E}^{\text{in}} = E^{\text{in}} \cdot e^{-j\omega t} \cdot \hat{p}$$

Κάθε φορά που κάποιο πεδίο προσπίπτει σε έναν καθρέπτη, μέρος του πεδίου αυτού ανακλάται και μέρος του διέρχεται μέσα από τον καθρέπτη. Το ανακλώμενο πεδίο το υπολογίζουμε πολλαπλασιάζοντας το προσπίπτον πεδίο με \sqrt{R} . Το διερχόμενο μέσα από τον καθρέπτη πεδίο το υπολογίζουμε πολλαπλασιάζοντας το προσπίπτον πεδίο με $\sqrt{1-R}$. Κάθε φορά που ένα πεδίο διασχίζει το υλικό ανάμεσα στους καθρέπτες παίρνει μια διαφορά φάσης $k \cdot l$, όπου k ο κυματαριθμός.



Άσκηση 1

Με βάση τα παραπάνω, στην έξοδο θα παρουσιαστούν τα πεδία:

- Απευθείας πεδίο (μία διέλευση από πρώτο και δεύτερο καθρέπτη):

$$\mathbf{E}^{1T} = (1 - R) \cdot e^{-j \cdot k \cdot l} \cdot E^{in} \cdot e^{-j \omega t} \cdot \hat{p}$$

- Πρώτο ανακλώμενο (δύο επιπλέον ανακλάσεις σε σχέση με το απευθείας πεδίο):

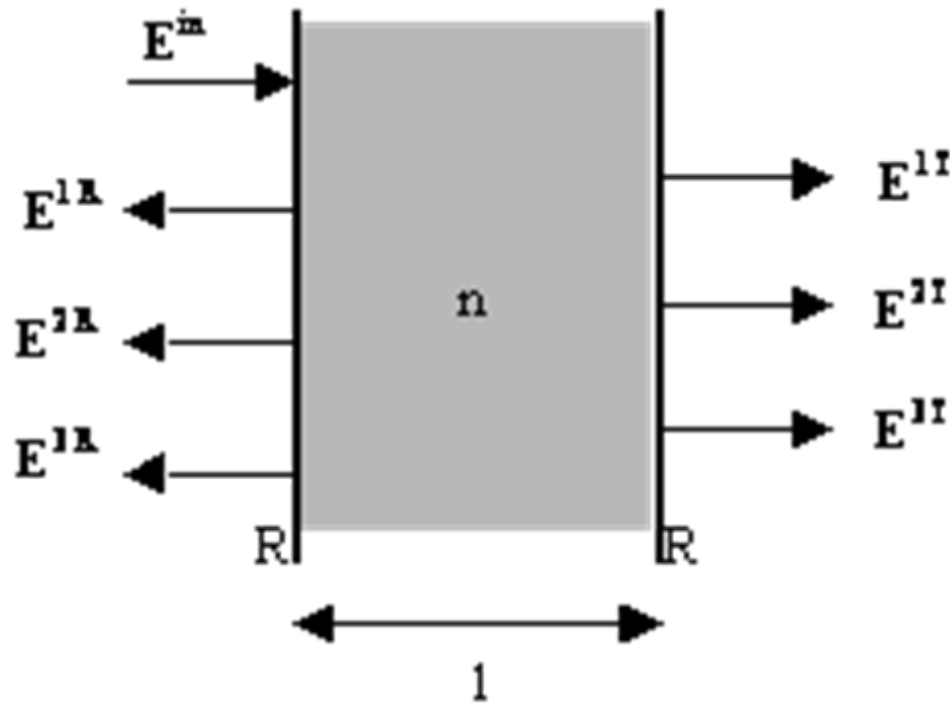
$$\mathbf{E}^{2T} = R \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot k \cdot l} \cdot \mathbf{E}^{1T}$$



Άσκηση 1

- Δεύτερο ανακλώμενο (δύο επιπλέον ανακλάσεις σε σχέση με το πρώτο ανακλώμενο πεδίο):

$$\mathbf{E}^{3T} = R \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot k \cdot l} \cdot \mathbf{E}^{2T} = \left(R \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot k \cdot l} \right)^2 \cdot \mathbf{E}^{1T} \quad \text{κ.ο.κ}$$





Άσκηση 1

Γενικά μπορούμε να γράψουμε $\mathbf{E}^{NT} = \left(R \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot k \cdot l}\right)^{N-1} \cdot \mathbf{E}^{1T}$, και επειδή το συνολικό πεδίο στην έξοδο είναι:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \sum_{N=1}^{\infty} \mathbf{E}^{NT} = \sum_{N=1}^{\infty} \left(R \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot k \cdot l}\right)^{N-1} \mathbf{E}^{1T} = \sum_{N=0}^{\infty} \left(R \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot k \cdot l}\right)^N \cdot \mathbf{E}^{1T} = \\ &\frac{1}{1 - R \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot k \cdot l}} \cdot \mathbf{E}^{1T} = \frac{(1 - R) \cdot e^{-j \cdot k \cdot l}}{1 - R \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot k \cdot l}} \cdot \mathbf{E}^{\text{in}} \end{aligned}$$



Άσκηση 1

Η συνάρτηση μεταφοράς εύκολα προκύπτει ότι είναι:

$$T(k) = \left| \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{E}^{\text{in}}} \right|^2 = \left| \frac{(1-R) \cdot e^{-j \cdot k \cdot l}}{1 - R \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot k \cdot l}} \right|^2 = \frac{(1-R)^2}{1 - 2 \cdot R \cdot \cos(2 \cdot k \cdot l) + R^2} = \frac{(1-R)^2}{(1-R)^2 + 2 \cdot R \cdot [1 - \cos(2 \cdot k \cdot l)]} = \frac{(1-R)^2}{(1-R)^2 + 4 \cdot R \cdot \sin^2(k \cdot l)}$$

ή σε πιο συμπυκνόμενη μορφή και αντικαθιστώντας όπου

$$k = \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{\lambda} = \frac{2 \cdot \pi \cdot n \cdot f}{c}$$

$$T(f) = \frac{1}{1 + \left(\frac{2 \cdot \sqrt{R}}{1-R} \cdot \sin \left(\frac{2\pi \cdot n \cdot l}{c} \cdot f \right) \right)^2}$$



Άσκηση 1

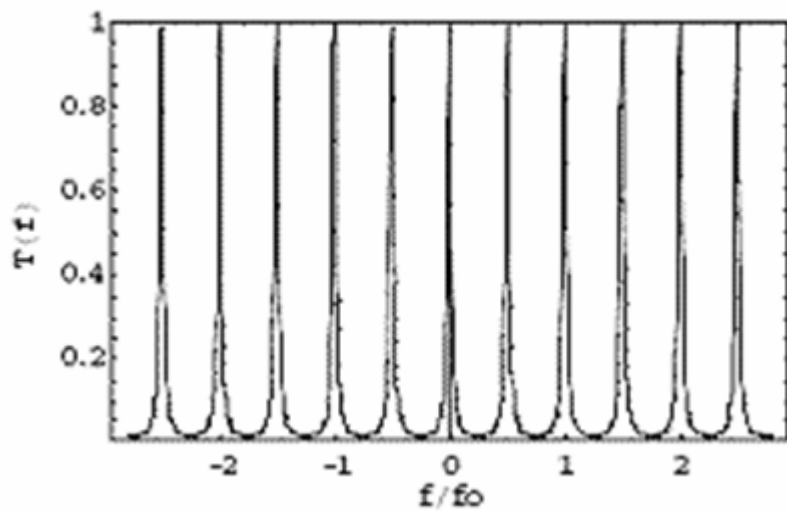
Η συνάρτηση μεταφοράς για το ανακλώμενο πεδίο είναι:

$$R(f) = 1 - T(f) = \frac{\left(\frac{2 \cdot \sqrt{R}}{1 - R} \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot n \cdot l}{c} \cdot f \right) \right)^2}{1 + \left(\frac{2 \cdot \sqrt{R}}{1 - R} \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot n \cdot l}{c} \cdot f \right) \right)^2}$$

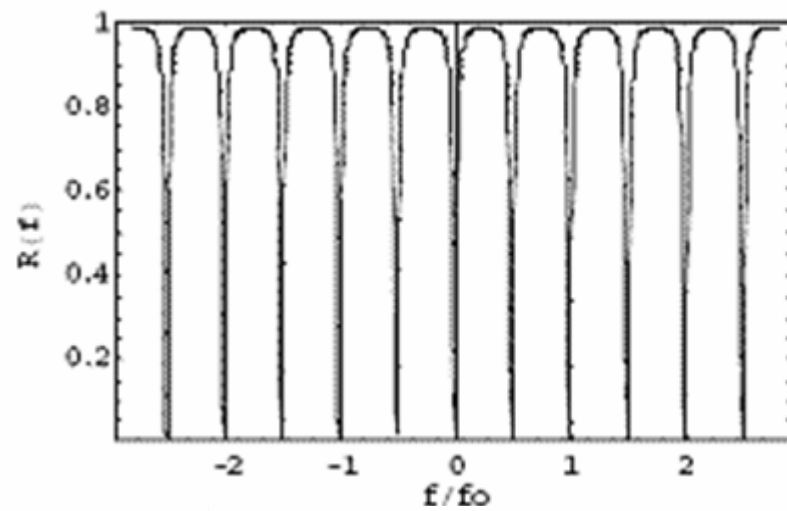
Οι δύο συναρτήσεις φαίνονται στο παρακάτω σχήμα για $R=0.8$ (ορίστηκε $f_0 = \frac{c}{n \cdot l}$)



Άσκηση 1



Συνάρτηση μεταφοράς της διέλευσης



Συνάρτηση μεταφοράς της ανάκλασης



Άσκηση 1

(β) Ελεύθερη φασματική περιοχή:

$$T(f_{\max}) = \max \Rightarrow \left(\frac{2 \cdot \sqrt{R}}{1 - R} \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot n \cdot l}{c} \cdot f_{\max} \right) \right)^2 = 0 \Rightarrow \frac{2\pi \cdot n \cdot l}{c} \cdot f_{\max} = k \cdot \pi \Rightarrow$$

$$f_{\max} = \frac{c}{2 \cdot n \cdot l} \cdot k, \quad k = 0, 1, \dots$$

Η ελεύθερη φασματική περιοχή είναι η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών f_{\max} . Άρα

$$\text{FSR} = \Delta f_{\max} = \frac{c}{2 \cdot n \cdot l}$$



Άσκηση 1

Εύρος ζώνης ημίσειας ισχύος:

$$T(f_{1/2}) = \frac{1}{2} T(f_{\max}) \Rightarrow \frac{1}{1 + \left(\frac{2 \cdot \sqrt{R}}{1 - R} \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot n \cdot l}{c} \cdot f_{1/2} \right) \right)^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2 \cdot \sqrt{R}}{1 - R} \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot n \cdot l}{c} \cdot f_{1/2} \right) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{2\pi \cdot n \cdot l}{c} \cdot f_{1/2} \right) = \frac{1 - R}{2 \cdot \sqrt{R}}$$



Άσκηση 1

Αν $R \approx 1$ τότε το δεύτερο μέλος είναι μικρό και το ημίτονο μπορεί να αντικατασταθεί με το όρισμά του

$$\frac{2\pi \cdot n \cdot l}{c} \cdot f_{1/2} = \frac{1-R}{2 \cdot \sqrt{R}} \Rightarrow f_{1/2} = \frac{c}{2\pi \cdot n \cdot l} \cdot \frac{1-R}{2 \cdot \sqrt{R}}$$

Άρα
$$\text{FWHM} = 2 \cdot f_{1/2} = \frac{c}{2 \cdot n \cdot l} \cdot \frac{1-R}{\pi \cdot \sqrt{R}}$$

Τελικά προκύπτει η λεπτότητα

$$F = \frac{\text{FSR}}{\text{FWHM}} = \frac{\pi \cdot \sqrt{R}}{1-R}$$



Άσκηση 1

Η μεγάλη τιμή που εν γένει παρουσιάζει το F-P φίλτρο οφείλεται στην συμβολή άπειρων συνιστωσών του κύματος εισόδου. Αντίθετα, στα φίλτρα MZI και PM συμβάλλουν μόνο δύο συνιστώσες.

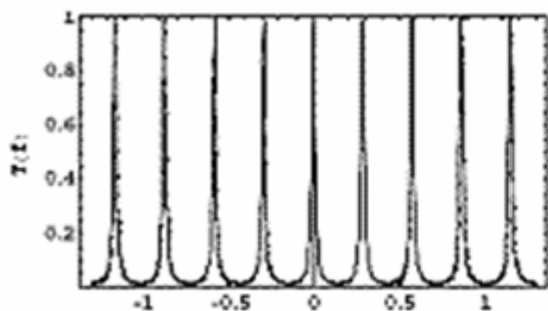
(γ) Η συνάρτηση μεταφοράς θα είναι το γινόμενο των δύο επιμέρους συναρτήσεων μεταφοράς. Άρα:

$$T_{\text{tot}}(f) = \frac{1}{1 + \left(\frac{2 \cdot \sqrt{R}}{1 - R} \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot n \cdot l_1 \cdot f}{c} \right) \right)^2} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{2 \cdot \sqrt{R}}{1 - R} \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot n \cdot l_2 \cdot f}{c} \right) \right)^2}$$

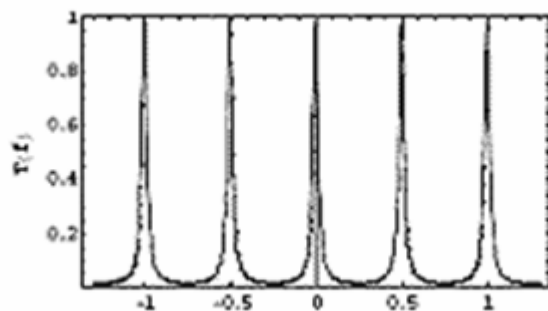


Άσκηση 1

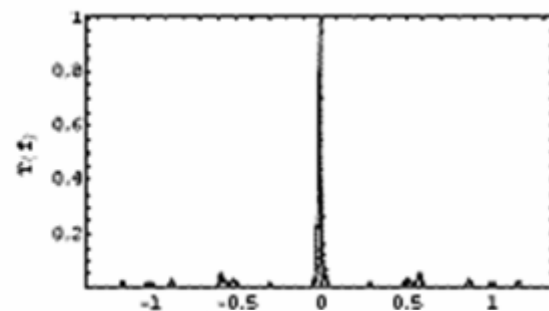
Η παραπάνω συνάρτηση μεταφοράς φαίνεται στο παρακάτω σχήμα για $R=0.8$ και $l_2 = \sqrt{3} \cdot l_1$. Επιπλέον ορίστηκε η συχνότητα $f_0 = \frac{c}{n \cdot l_1}$.



Συνάρτηση μεταφοράς του πρώτου φίλτρου



Συνάρτηση μεταφοράς του δεύτερου φίλτρου



Συνάρτηση μεταφοράς της διάταξης

Αν ισχύει $l_1/l_2 = k/m$, τότε

- Το πρώτο φίλτρο παρουσιάζει μέγιστο στα σημεία

$$f_1 = i \cdot \frac{c}{2 \cdot n \cdot l_1}, i = 0, 1, \dots$$



Άσκηση 1

- Το δεύτερο φίλτρο παρουσιάζει μέγιστο στα σημεία

$$f_2 = j \cdot \frac{c}{2 \cdot n \cdot l_2} = j \cdot \frac{k}{m} \cdot \frac{c}{2 \cdot n \cdot l_1}, \quad j = 0, 1, \dots$$

Άρα τα κοινά μέγιστα υπάρχουν για i, j που ικανοποιούν τη σχέση:

$$i \cdot m = j \cdot k$$

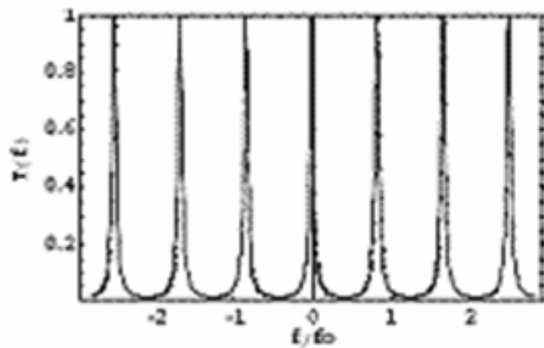
Για να είναι ο i ακέραιος θα πρέπει ο j να είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του m . Έτσι προκύπτει ότι η συνολική συνάρτηση μεταφοράς της διάταξης θα είναι μη μηδενική μόνο γύρω από τις συχνότητες:

$$f_q = q \cdot k \cdot \frac{c}{2 \cdot n \cdot l_1}, \quad q = 0, 1, \dots$$

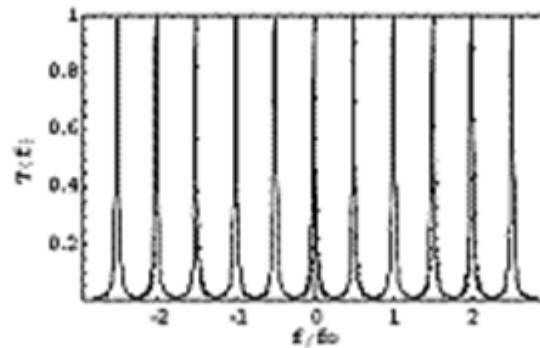


Άσκηση 1

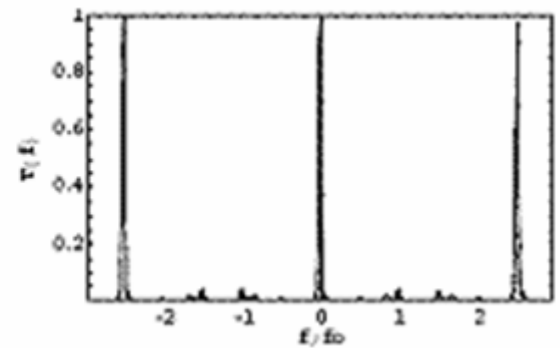
Επομένως $FSR = k \cdot FSR_1 = m \cdot FSR_2$. Ενδεικτικά σχεδιάζεται η συνάρτηση μεταφοράς για $k=3, m=5$ ($R=0.8$):



Συνάρτηση μεταφοράς του πρώτου φίλτρου



Συνάρτηση μεταφοράς του δεύτερου φίλτρου

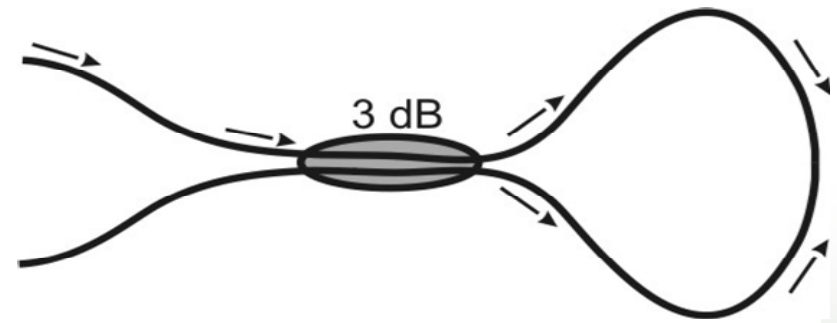
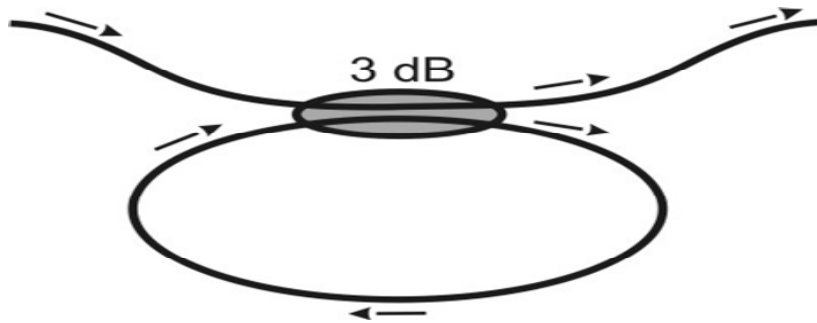


Συνάρτηση μεταφοράς της διάταξης



Άσκηση 2

Εξηγείστε ποια είναι η διαφορά μεταξύ τους και πως λειτουργούν οι παρακάτω διατάξεις:





Άσκηση 2

Λύση : Διάταξη 1

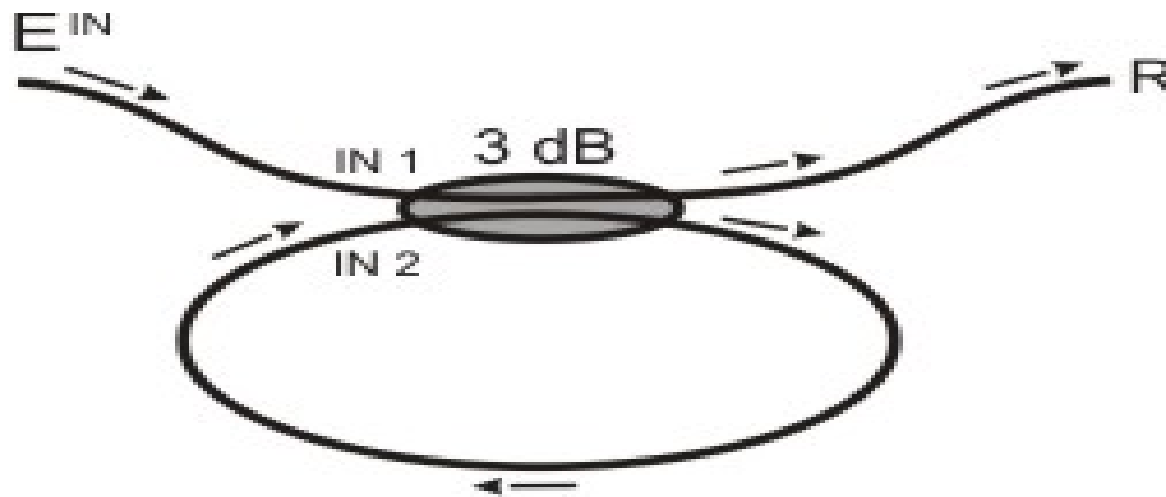
Έστω ότι το πεδίο εισόδου είναι:

$$\mathbf{E}^{\text{in}} = E^{\text{in}} \cdot e^{-j\omega t} \cdot \hat{p}$$

Όταν το πεδίο αυτό μπαίνει στο συζεύκτη από τη θύρα IN 1, μέρος αυτού εξέρχεται από τη θύρα R ενώ το υπόλοιπο μπαίνει μέσα στον κλειστό βρόχο (με μήκος έστω l). Μετά την διέλευσή του από τον κλειστό βρόχο, το πεδίο αυτό μπαίνει ξανά μέσα στο συζεύκτη από τη θύρα IN 2. Μέρος του πεδίου αυτού εξέρχεται από τη θύρα R και το άλλο μπαίνει μέσα στον κλειστό βρόχο. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται συνεχώς.



Άσκηση 2



➤ Απευθείας πεδίο από θύρα R (πρώτη διέλευση πεδίου εισόδου \mathbf{E}^{in} από συζεύκτη):

$$\mathbf{E}^{1T} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{E}^{in} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot E^{in} \cdot e^{-j\omega t} \cdot \hat{p}$$



Άσκηση 2

➤ Πεδίο που μπαίνει μέσα στον κλειστό βρόχο (προερχόμενο από πεδίο εισόδου \mathbf{E}^{in}):

$$\mathbf{E}^{1\text{L}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot \mathbf{E}^{\text{in}} = e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot \mathbf{E}^{1\text{T}}$$

➤ Πρώτο πεδίο που εξέρχεται από θύρα R προερχόμενο από πρώτο διερχόμενο από τον κλειστό βρόχο $\mathbf{E}^{1\text{L}} \cdot e^{-j \cdot \mathbf{k} \cdot \mathbf{l}}$

$$\mathbf{E}^{2\text{T}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot \mathbf{E}^{1\text{L}} \cdot e^{-j \cdot \mathbf{k} \cdot \mathbf{l}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-j \cdot \mathbf{k} \cdot \mathbf{l}} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot \mathbf{E}^{1\text{T}} = -\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot e^{-j \cdot \mathbf{k} \cdot \mathbf{l}} \cdot \mathbf{E}^{1\text{T}}$$



Άσκηση 2

➤ Πεδίο που μπαίνει μέσα στον κλειστό βρόχο για δεύτερη φορά :

$$\mathbf{E}^{2L} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{E}^{1L} \cdot e^{-j \cdot k \cdot l} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot e^{-j \cdot k \cdot l} \cdot e^{-j \frac{\pi}{2}} \cdot \mathbf{E}^{1T}$$

➤ Δεύτερο πεδίο που εξέρχεται από θύρα R προερχόμενο από δεύτερο διερχόμενο από τον κλειστό βρόχο $\mathbf{E}^{2L} \cdot e^{-j \cdot k \cdot l}$

$$\mathbf{E}^{3T} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot e^{-j \frac{\pi}{2}} \cdot \mathbf{E}^{2L} \cdot e^{-j \cdot k \cdot l} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot e^{-j \frac{\pi}{2}} \cdot e^{-j \cdot k \cdot l} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot e^{-j \cdot k \cdot l} \cdot e^{-j \frac{\pi}{2}} \cdot \mathbf{E}^{1T} = -\frac{1}{2} \cdot e^{-2 \cdot j \cdot k \cdot l} \cdot \mathbf{E}^{1T}$$

Κ.Ο.Κ.



Άσκηση 2

Γενικά μπορούμε να γράψουμε $\mathbf{E}^{NT} = -\left(\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot e^{-j \cdot k \cdot l}\right)^{N-1} \cdot \mathbf{E}^{1T}$
και επειδή το συνολικό πεδίο στην έξοδο είναι:

$$\mathbf{E} = \sum_{N=1}^{\infty} \mathbf{E}^{NT} = -\sum_{N=1}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot e^{-j \cdot k \cdot l}\right)^{N-1} \mathbf{E}^{1T} = -\sum_{N=0}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot e^{-j \cdot k \cdot l}\right)^N \mathbf{E}^{1T} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot e^{-j \cdot k \cdot l} - 1} \cdot \mathbf{E}^{1T} = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot e^{-j \cdot k \cdot l} - 1} \cdot \mathbf{E}^{in}$$



Άσκηση 2

ή σε πιο συμπυκνόμενη μορφή και αντικαθιστώντας όπου

$$k = \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{\lambda} = \frac{2 \cdot \pi \cdot n \cdot f}{c}$$

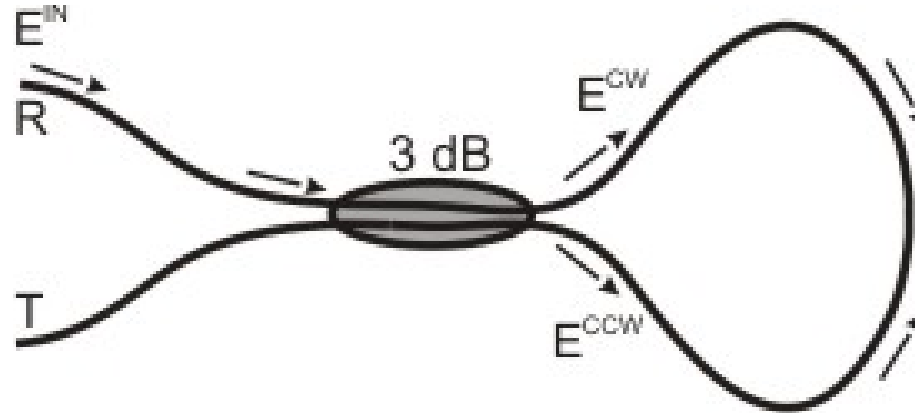
$$T(f) = \frac{\left[\frac{\sqrt{\frac{1}{2}}}{1 - \sqrt{\frac{1}{2}}} \right]^2}{1 + \left[\frac{2 \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{2}} \cdot \sin \frac{\pi \cdot n \cdot f \cdot l}{c}}{1 - \sqrt{\frac{1}{2}}} \right]^2}$$

Η συνάρτηση μεταφοράς αυτή, σύμφωνα με την προηγούμενη άσκηση αποτελεί συνάρτηση μεταφοράς ενός περιοδικού φίλτρου



Άσκηση 2

Λύση : Διάταξη 2



Έστω ότι το σήμα εισόδου είναι:

$$\mathbf{E}^{\text{in}} = E^{\text{in}} \cdot e^{-j\omega t} \cdot \hat{p}$$



Άσκηση 2

Στις δύο εξόδους του συζεύκτη θα εμφανιστούν το
ωρολογιακά:

$$\mathbf{E}^{CW} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{E}^{in} \cdot e^{-j\omega t} \cdot \hat{p}$$

και ανθωρολογιακά περιστρεφόμενο σήμα:

$$\mathbf{E}^{CCW} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot \mathbf{E}^{in} \cdot e^{-j\omega t} \cdot \hat{p}$$



Άσκηση 2

Τα δύο σήματα που τελικά θα εμφανιστούν στις θύρες R και T της διάταξης δίνονται από τις σχέσεις:

$$\mathbf{E}^R = \left(\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{E}^{\text{CCW}} + \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot \mathbf{E}^{\text{CW}} \right) = e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot \mathbf{E}^{\text{in}} \cdot e^{-j\omega t} \cdot \hat{p}$$

και

$$\mathbf{E}^T = \left(\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{E}^{\text{CW}} + \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot \mathbf{E}^{\text{CCW}} \right) = 0$$

Άρα όλη η ισχύς περνά στη θύρα R, ενώ στη θύρα T δεν υπάρχει πεδίο (mirror coupler).



Άσκηση 3

Περιγράψτε σύντομα τη λειτουργία του φίλτρου Fabry-Perot, κάνοντας χρήση της συνάρτησης μεταφοράς του. Περιγράψτε τι θα συμβεί στην έξοδο δύο διαδοχικών φίλτρων Fabry-Perot τα οποία έχουν καθρέφτες με την ίδια ανακλαστικότητα R και μήκη κοιλότητας l_1 και l_2 ώστε $l_1/l_2=1/3$. Τι θα συμβεί αν αντιστρέψουμε τη σειρά των φίλτρων έτσι ώστε $l_1/l_2=3/1$;



Άσκηση 3

Λύση

Η συνάρτηση μεταφοράς του Fabry-Perot είναι

$$T(f) = \frac{1}{1 + \left(\frac{2\sqrt{R}}{1-R} \cdot \sin\left(\frac{\pi f}{FSR} \right) \right)^2} \quad \text{όπου} \quad FSR = \frac{c}{2 \cdot \eta \cdot l}$$

Η χρονική απόκριση του Fabry-Perot σε κρουστική διέγερση είναι μια φθίνουσα ακολουθία παλμών, με πλάτη που φθίνουν πολυωνυμικά με σταθερά R^k και χρονική απόσταση μεταξύ τους ίση με $1/FSR$. Στο πεδίο της συχνότητας, το Fabry-Perot επιλέγει περιοδικά συχνότητες για τις οποίες ισχύει $f = kFSR$, ενώ το εύρος ζώνης της κάθε επιλέγουσας κορυφής είναι:



Άσκηση 3

$$\Delta f = FSR \cdot \frac{1-R}{\pi\sqrt{R}}$$

Περίπτωση $l_1/l_2=1/3$: Το Fabry-Perot με μήκος l_1 έχει

$$FSR_1 = \frac{c}{2 \cdot \eta \cdot l_1}$$

Το Fabry-Perot με μήκος l_2 έχει

$$FSR_2 = \frac{c}{2 \cdot \eta \cdot l_2} = \frac{c}{2 \cdot \eta \cdot 3l_1} = \frac{FSR_1}{3}$$

Άρα το πρώτο φίλτρο θα έχει μία κορυφή για κάθε τρεις του δεύτερου.



Άσκηση 3

Όσον αφορά, τη φασματική απόκριση είναι $T(f) = T_1(f) \cdot T_2(f)$
Οι συναρτήσεις μεταφοράς κάθε φίλτρου και το αποτέλεσμα της διαδοχής των φίλτρων σχεδιάζονται παρακάτω.

Περίπτωση $l_1/l_2=3$: Ομοίως, το Fabry-Perot με μήκος l_1 έχει

$$FSR_1 = \frac{c}{2 \cdot \eta \cdot l_1}$$

και το Fabry-Perot με μήκος l_2 έχει

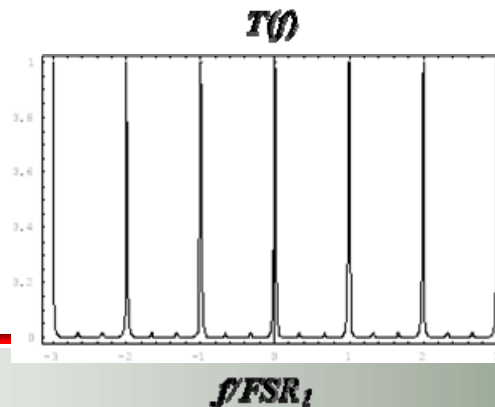
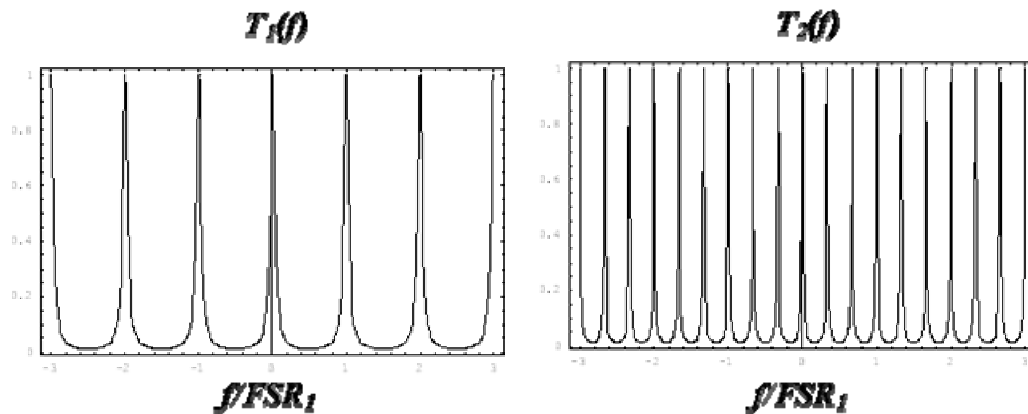
$$FSR_2 = \frac{c}{2 \cdot \eta \cdot l_2} = \frac{c}{2 \cdot \eta \cdot l_1 / 3} = 3 \cdot FSR_1$$

Άρα το πρώτο φίλτρο θα έχει τρεις κορυφές για κάθε μία του δεύτερου. Όσον αφορά τη φασματική απόκριση είναι επίσης $T(f) = T_1(f) \cdot T_2(f)$



Άσκηση 3

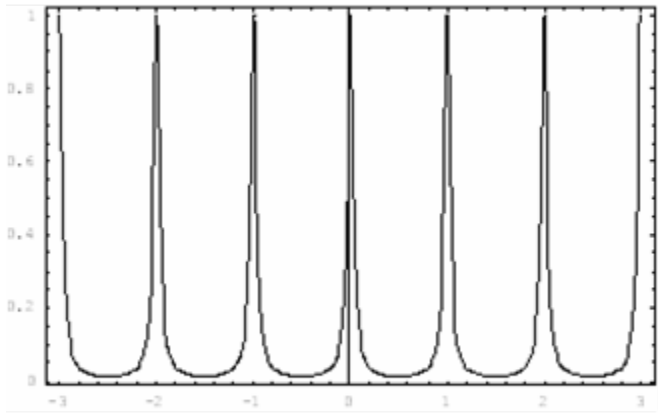
Οι συναρτήσεις μεταφοράς κάθε φίλτρου και το αποτέλεσμα της διαδοχής των φίλτρων σχεδιάζονται παρακάτω. Το αποτέλεσμα της διαδοχής είναι προφανώς όμοιο με αυτό της προηγούμενης περίπτωσης.





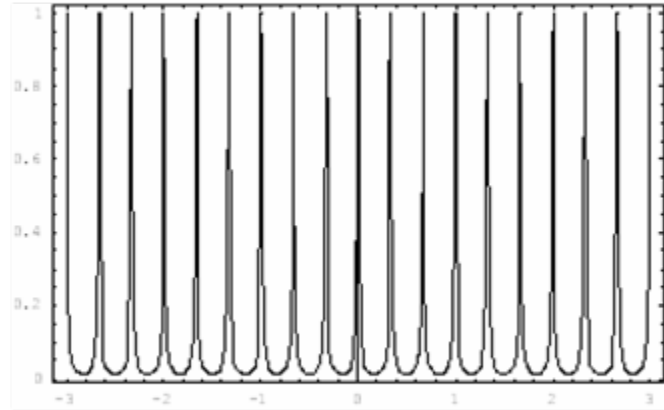
Άσκηση 3

$T_1(f)$



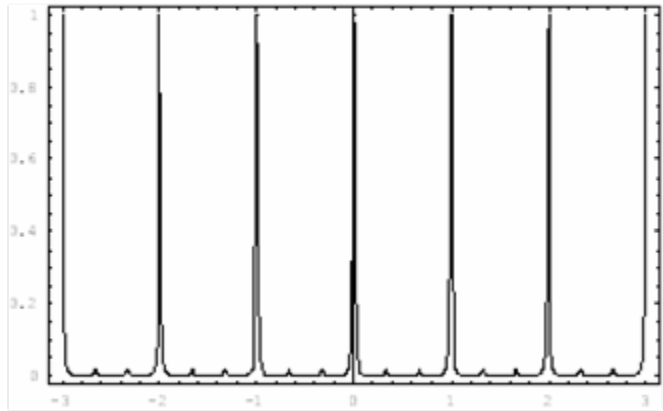
f/FSR_1

$T_2(f)$



f/FSR_1

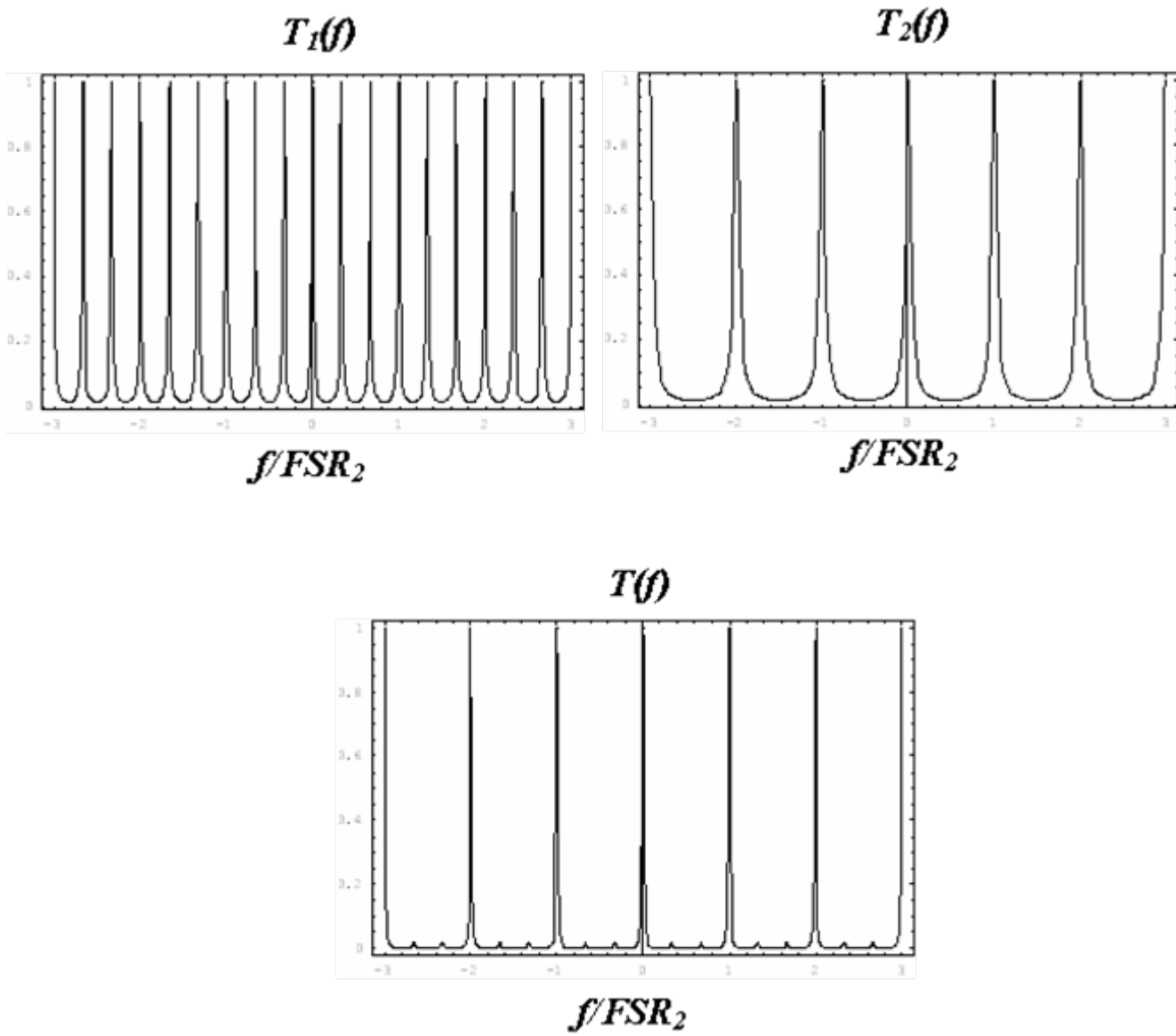
$T(f)$



f/FSR_1



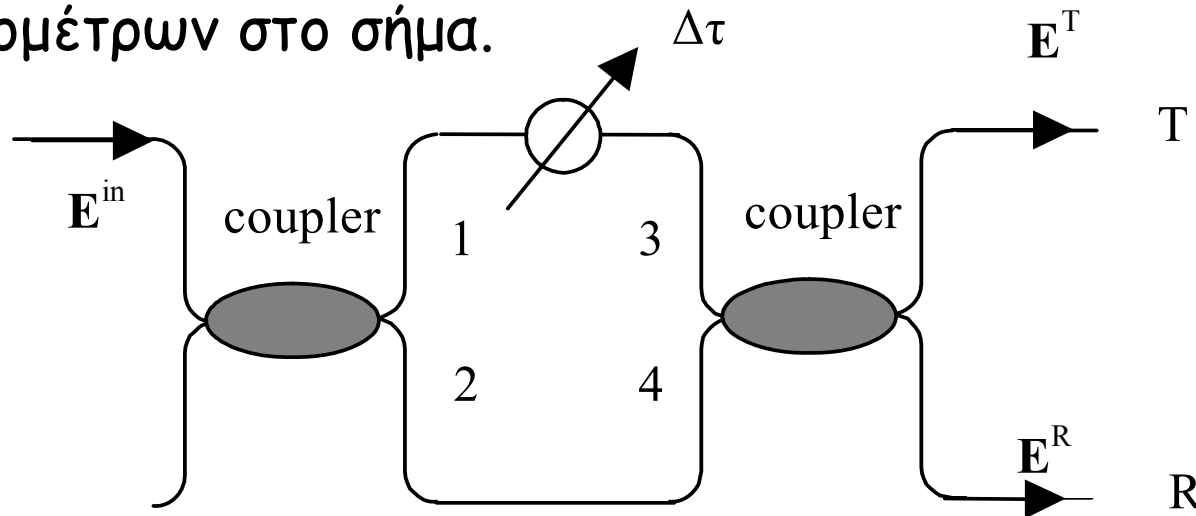
Άσκηση 3





Άσκηση 4

Υποθέστε ότι έχετε διάταξη συμβολομέτρου ΜΖΙ. Με τη βοήθεια μπλοκ διαγράμματος δείξτε πως θα φτιάχνατε έναν αποπλυπλέκτη, $1 \times n$, πολυκυματικού σήματος με n μήκη κύματος χρησιμοποιώντας τέτοιες διατάξεις ΜΖΙ. Ας υποθέσουμε ότι το σήμα αποτελείται από 16 μήκη κύματος, των 10 Gb/s το καθένα και απόσταση 100 GHz μεταξύ γειτονικών μηκών κύματος. Πόσα συμβολόμετρα χρειάζονται για τον αποπολυπλέκτη και ποια πρέπει να είναι η σχετική καθυστέρηση $\Delta\tau$ που θα πρέπει να εισάγουν τα σκέλη των συμβολομέτρων στο σήμα.





Άσκηση 4

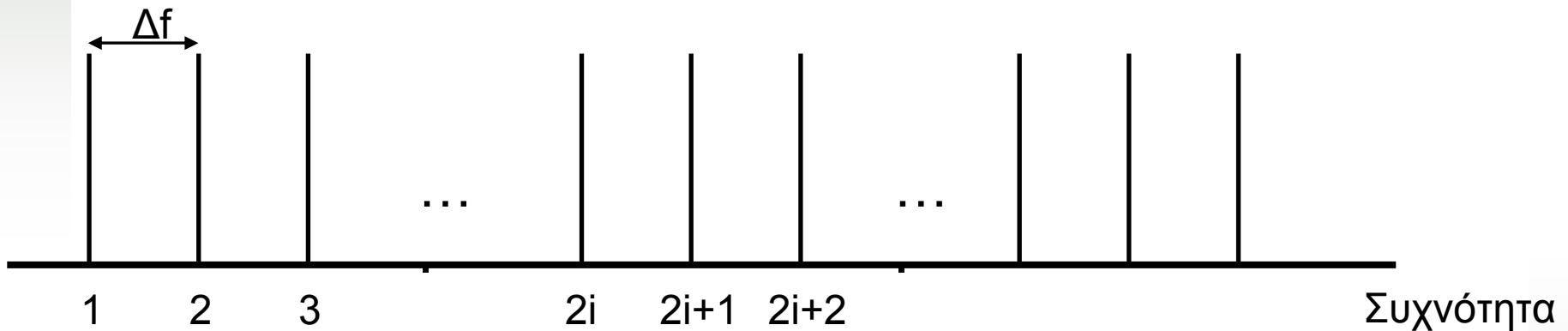
Λύση

Στην άσκηση A.1 του βιβλίου είδαμε ότι ένα συμβολόμετρο ΜΖΙ λειτουργεί σαν περιοδικό φίλτρο με ελεύθερη φασματική περιοχή ίση με $FSR = \frac{1}{\Delta\tau}$ και εύρος ζώνης ημίσειας ισχύος ίσο με $FWHM = \frac{1}{2 \cdot \Delta\tau}$.



Άσκηση 4

Το πολυκυματικό σήμα που θέλω να αποπολυπλέξω έχει την εξής μορφή στο πεδίο των συχνοτήτων :

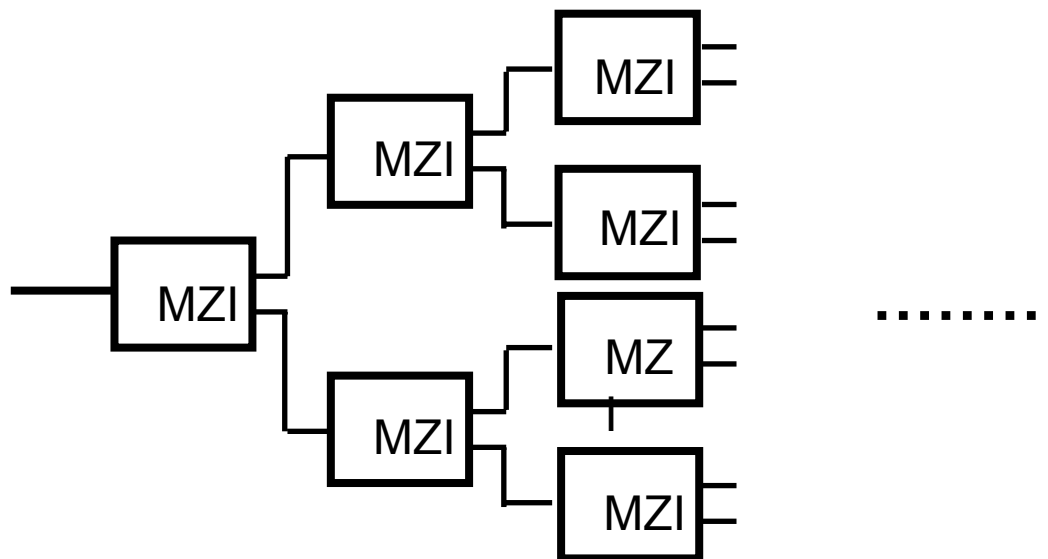


Επιλέγοντας κατάλληλο FSR για το φίλτρο ($FSR=2\Delta f$) μπορώ να χωρίσω τα κανάλια σε άρτια και περιττά και να τα διαχωρίσω. Αν χρησιμοποιήσω αυτή τη λογική σε διαδοχικά στάδια διασυνδέοντας σειριακά πολλά ΜΖΙ μπορώ να απομονώσω ένα ένα τα κανάλια και συνεπώς να τα αποπολυπλέξω.



Άσκηση 4

Επομένως το ζητούμενο μπλοκ διάγραμμα για έναν αποπλυπλέκτη $1 \times n$ είναι :



Για η μήκη κύματος θα χρειαστώ $n/2$ MZI στην τελευταία έξοδο και $\log_2 n$ βαθμίδες. Συνεπώς συνολικά θα χρειαστώ

συμβολόμετρα $\sum_{k=0}^{\log_2 n - 1} 2^k$ MZI.



Άσκηση 4

Για να διαχωρίσω 16 μήκη κύματος χρειάζομαι 15 συμβολόμετρα. Σε κάθε βαθμίδα το κάθε συμβολόμετρο χωρίζει τα κανάλια στην είσοδό του σε άρτια και περιττά και η ελεύθερη φασματική περιοχή του καθορίζεται από τον τύπο $FSR = \frac{1}{\Delta\tau}$. Προφανώς τα συμβολόμετρα που ανήκουν στην ίδια βαθμίδα θα έχουν το ίδιο FSR το οποίο συνδέεται με το FSR της προηγούμενης βαθμίδας με τη σχέση $FSR_{i+1} = 2 * FSR_i$.



Άσκηση 4

Έτσι για τα κανάλια της άσκησης όπου απέχουν μεταξύ τους απόσταση 100 GHz θα ισχύει :

$$\text{Βαθμίδα 1η : } FSR_1 = 200 \text{ GHz}$$

$$\text{Βαθμίδα 2η : } FSR_2 = 400 \text{ GHz}$$

$$\text{Βαθμίδα 3η : } FSR_3 = 800 \text{ GHz}$$

$$\text{Βαθμίδα 4η : } FSR_4 = 1600 \text{ GHz}$$

Από τον τύπο $FSR = \frac{1}{\Delta\tau}$ υπολογίζουμε για την κάθε βαθμίδα τη σχετική καθυστέρηση $\Delta\tau$ που θα πρέπει να εισάγουν τα σκέλη των συμβολομέτρων. Έτσι :

$$\text{Βαθμίδα 1η : } \Delta\tau_1 = 5 \text{ psec}$$

$$\text{Βαθμίδα 2η : } \Delta\tau_2 = 2.5 \text{ psec}$$

$$\text{Βαθμίδα 3η : } \Delta\tau_3 = 1.25 \text{ psec}$$

$$\text{Βαθμίδα 4η : } \Delta\tau_4 = 0.625 \text{ psec}$$



Άσκηση 5

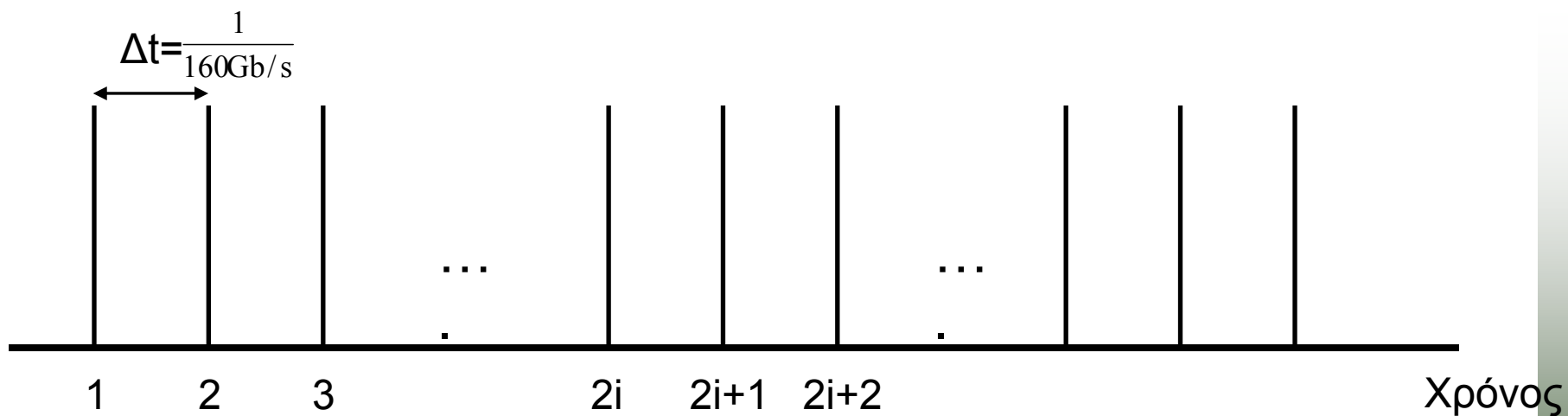
Ας υποθέσουμε ότι το αρχικό μας σήμα των 16 καναλιών με διαμόρφωση στα 10 Gb/s το κάθε ένα, πολυπλέκεται στο χρόνο (TDM) στα 160 Gb/s και σε ένα μήκος κύματος. Πως πρέπει να τροποποιήσετε τον παραπάνω αποπολυπλέκτη για να αποπολυπλέξει αυτό το σήμα; Με αφορμή το παράδειγμα του αποπολυπλέκτη, σχολιάστε ποια από τις δυο τεχνικές πολυπλεξίας TDM, WDM είναι προτιμητέα για υψίρυθμα σήματα και γιατί.



Άσκηση 5

Λύση

Στην περίπτωση αυτή το αρχικό σήμα των $16 \times 10 \text{ Gb/s}$ είναι πολυπλεγμένο στο χρόνο οπότε αυτό έχει την εξής μορφή στο πεδίο του χρόνου :





Άσκηση 5

Η περίοδος του πολυπλεγμένου σήματος είναι $1/160 \text{ Gb/s} = 6.25 \text{ psec}$, ενώ του κάθε καναλιού χωριστά είναι $10 \text{ Gb/s} = 100 \text{ psec}$. Για τη αποπολυπλεξία των 16 αυτών καναλιών θα εφαρμόσουμε την ίδια αρχή σχεδιασμού αλλά αυτή τη φορά στο πεδίο του χρόνου. Για το λόγο αυτό θα χρησιμοποιήσουμε το ίδιο μπλοκ διάγραμμα με τη διαφορά ότι ο διαχωρισμός των καναλιών ανάγεται αυτή τη φορά στο διαχωρισμό μεταξύ άρτιων και περιττών χρονοθυρίδων. Για να μπορέσω, όμως, να πετύχω το διαχωρισμό θα πρέπει να επιτύχω χρονικά μεταβαλλόμενη συμπεριφορά της απόκρισης του συμβολομέτρου (επιλογή χρονοθυρίδων στο χρόνο). Για το λόγο αυτό θα χρειαστώ συμβολόμετρα ΜΖΙ με ενεργητικά στοιχεία, αντί για σχετικές καθυστερήσεις, στα δύο σκέλη των συμβολομέτρων.



Άσκηση 5

Σε κάθε βαθμίδα θα χωρίσουμε τις πολυπλεγμένες χρονοθυρίδες σε άρτιες και περιττές. Αναλυτικά η περίοδο των συμβολομέτρων σε κάθε βαθμίδα θα είναι :

Βαθμίδα 1η : $T_1 = 12.5 \text{ psec}$

Βαθμίδα 2η : $T_2 = 25 \text{ psec}$

Βαθμίδα 3η : $T_3 = 50 \text{ psec}$

Βαθμίδα 4η : $T_4 = 100 \text{ psec}$

Άρα τελικά χρειαζομαι :

1 MZI με ταχύτητα $\geq 80 \text{ Gb/s}$

2 MZI με ταχύτητα $\geq 40 \text{ Gb/s}$

4 MZI με ταχύτητα $\geq 20 \text{ Gb/s}$

8 MZI με ταχύτητα $\geq 10 \text{ Gb/s}$



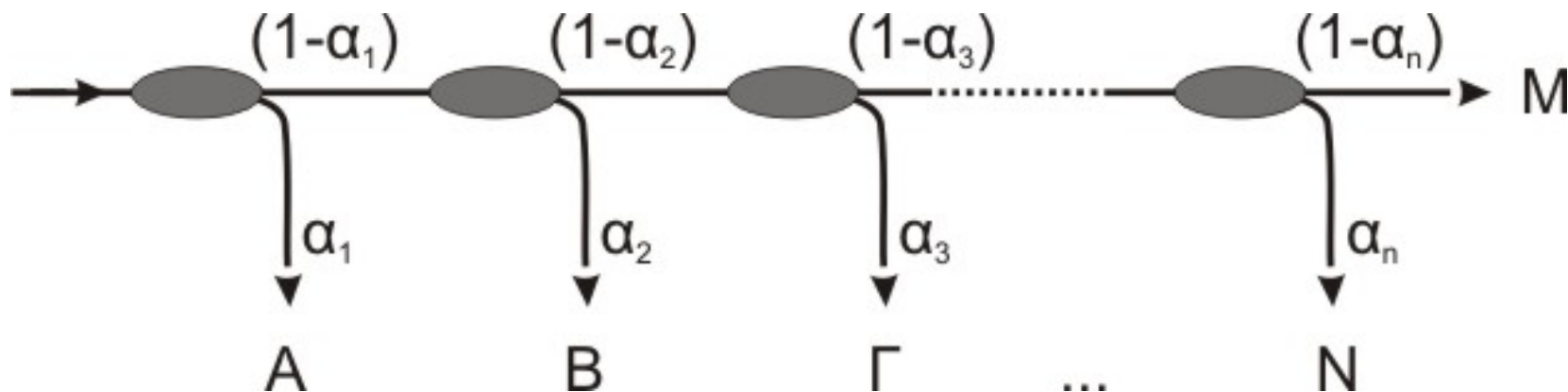
Άσκηση 5

Από τις δυο τεχνικές πολυπλεξίας TDM και WDM η πολυπλεξία WDM είναι προτιμητέα για υψίρουθμα σήματα γιατί απαιτεί λιγότερη πολυπλοκότητα στα συστήματα επεξεργασίας σήματος, μετάδοσης και λήψης, χρειάζεται λιγότερα οπτικά και βεβαίως λιγότερους συγχρονισμούς.



Άσκηση 6

Βρείτε τη γενική σχέση λόγου διαχωρισμού ισχύος $(1-\alpha)/\alpha$ για τους συζεύκτες στη παρακάτω διάταξη δικτύου, ώστε οι ισχύς στις τερματικές εξόδους A, B, Γ, \dots, N και M να είναι οι ίδιες.





Άσκηση 6

Λύση

Για να είναι οι ισχύς στις τερματικές εξόδους A, B, Γ, \dots, N και M ίδιες, για δύο οποιεσδήποτε διαδοχικές τερματικές εξόδους j και $j+1$ θα πρέπει να ισχύει :

$$(1-\alpha_1) (1-\alpha_2) (1-\alpha_3) \dots (1-\alpha_{j-1}) \alpha_j =$$

$$(1-\alpha_1) (1-\alpha_2) (1-\alpha_3) \dots (1-\alpha_{j-1}) (1-\alpha_j) \alpha_{j+1} \quad \Rightarrow$$

$$\alpha_j = (1-\alpha_j) \alpha_{j+1} \Rightarrow \alpha_j = \alpha_{j+1} - \alpha_j \alpha_{j+1} \quad \Rightarrow$$

$$\alpha_j = \frac{\alpha_{j+1}}{1 + \alpha_{j+1}}$$



Άσκηση 6

Επίσης για τις δύο τελευταίες τερματικές εξόδους N και M θα πρέπει να ισχύει :

$$(1-a_1)(1-a_2)(1-a_3)\dots(1-a_j)\dots(1-a_{N-1}) a_N =$$

$$(1-a_1)(1-a_2)(1-a_3)\dots(1-a_j)\dots(1-a_{N-1})(1-a_N) \quad \Rightarrow$$

$$a_N = 1-a_N \quad \Rightarrow$$

$$a_N = 0.5$$



Άσκηση 6

Επομένως

$$\alpha_{N-1} = \frac{\alpha_N}{1 + \alpha_N} = \frac{0.5}{1 + 0.5} = \frac{1}{3}$$

$$\alpha_{N-2} = \frac{\alpha_{N-1}}{1 + \alpha_{N-1}} = \frac{1/3}{1 + 1/3} = \frac{1}{4}$$

$$\alpha_{N-3} = \frac{\alpha_{N-2}}{1 + \alpha_{N-2}} = \frac{1/4}{1 + 1/4} = \frac{1}{5}$$

⋮

$$\alpha_j = \frac{1}{2 + N - j}$$

K.O.K.



Άσκηση 6 (συνέχεια)

Ας υποθέσουμε ότι διαθέτουμε πομπό ισχύος -10 dBm, ότι οι δέκτες που διαθέτουμε έχουν ευαισθησία -20 dBm για ρυθμό σφαλμάτων 10^{-12} στα 2.5 Gb/s και ότι οι απώλειες των συζευκτών και της μετάδοσης στην οπτική ίνα είναι αμελητέες. Πόσους τερματικούς σταθμούς μπορούμε να συνδέσουμε;



Άσκηση 6 (συνέχεια)

Λύση

Πομπός ισχύος -10 dBm σημαίνει ότι ο πομπός εκπέμπει σήμα ίσο με 10^{-1} mW = 100 μ W ενώ ευαισθησία δέκτη ίση με -20 dBm σημαίνει ότι ο δέκτης μπορεί να δέχεται χωρίς σφάλματα ισχύ το λιγότερο ίση με 10^{-2} mW = 10 μ W.

Από την εκφώνηση της άσκησης βλέπουμε ότι οι απώλειες των συζευκτών και της μετάδοσης στην οπτική ίνα είναι αμελητέες και συνεπώς συμπεραίνουμε ότι όλη η οπτική ισχύς του πομπού μοιράζεται στις τερματικές εξόδους της διάταξής μας.



Άσκηση 6 (συνέχεια)

Έστω ότι έχουμε N συζεύκτες στη διάταξή μας, τότε θα έχουμε $N+1$ τερματικά (δέκτες) άρα η ισχύς του πομπού $P_{in} = 100 \mu W$ μοιράζεται σε $N+1$ δέκτες. Οπότε θα πρέπει να ισχύει για την ισχύ που δέχεται κάθε δέκτης:

$$\frac{P_{in}}{N+1} \geq 10\mu W \Rightarrow \frac{100\mu W}{N+1} \geq 10\mu W \Rightarrow N \leq 9$$



Άσκηση 6 (συνέχεια)

Πιθανοί τρόποι για να αυξήσουμε τον αριθμό τερματικών σταθμών είναι (α) να χρησιμοποιήσουμε πομπό μεγαλύτερης ισχύος, (β) να χρησιμοποιήσουμε δέκτες μεγαλύτερης ευαισθησίας, (γ) να χρησιμοποιήσουμε οπτική ενίσχυση. Υποθέτοντας ότι αντικατάσταση ή προσθήκη ενεργού στοιχείου συνεπάγεται ίδια αύξηση κόστους ανά μονάδα στοιχείου ανεξάρτητα του στοιχείου, αξιολογείστε τις τρεις μεθόδους και εξηγήστε ποιά θα προτιμούσατε.



Άσκηση 6 (συνέχεια)

Λύση (α) Φαίνεται μια καλή λύση γιατί πρέπει να αντικαταστήσω μόνο ένα στοιχείο. Η λύση αυτή, όμως, επιβαρύνεται από το κόστος της αντικατάστασης και επιπλέον δεν μπορώ να επεκτείνω το σύστημά μου επί άπειρο.

Λύση (β) Αυτό είναι μια κακή λύση γιατί συνεπάγεται αντικατάσταση όλων των τερματικών σταθμών με άλλους καλύτερους και άρα ακριβότερους.

Λύση (γ) Σύμφωνα με τη λύση αυτή μπορώ να βάλω μονάχα έναν ενισχυτή αμέσως μετά τον πομπό οπότε τότε η λύση μοιάζει με την (α). Μπορώ, επίσης, να κάνω περιοδική χρήση ενισχυτών ανάμεσα στους συζεύκτες οπότε με τον τρόπο αυτό να έχω περισσότερα τερματικά.



Άσκηση 7

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε δύο φίλτρα με περιοδικές συναρτήσεις μεταφοράς και περιόδους f_1 και f_2 (όπου f_1 και f_2 είναι ακέραιοι). (α) Αν τα φίλτρα χρησιμοποιηθούν σε ακολουθία, πως θα είναι η συνάρτηση μεταφοράς τους; (β) Πως θα είναι η συνάρτηση μεταφοράς της αλυσίδας αν $f_1=500$ GHz και $f_2=600$ GHz; Πως θα είναι η συνάρτηση μεταφοράς της αλυσίδας, αν οι συχνότητες των δύο φίλτρων υποστούν μικρο-αλλαγές και γίνουν, (γ) $f_1=525$ GHz και $f_2=630$ GHz, (δ) $f_1=475$ GHz και $f_2=630$ GHz, (ε) $f_1=475$ GHz και $f_2=570$ GHz και (στ) $f_1=525$ GHz και $f_2=570$ GHz



Άσκηση 7

Λύση

(α) Σύμφωνα με την άσκηση του βιβλίου A.1.1, όταν έχουμε περιοδικά φίλτρα που χρησιμοποιούμε σε ακολουθία, η συνάρτηση μεταφοράς τους θα είναι της μορφής $R(f) = \check{Z}(f) * \varphi(f)$ όπου $\check{Z}(f)$ η συνάρτηση μεταφοράς του πρώτου φίλτρου και $\varphi(f)$ η συνάρτηση μεταφοράς του δεύτερου φίλτρου. Επιπλέον, σύμφωνα με την άσκηση του βιβλίου A.1.2 τα μέγιστα της συνάρτησης μεταφοράς της αλυσίδας $R(f)$ θα βρίσκονται εκεί, όπου όλες οι επιμέρους συναρτήσεις μεταφοράς είναι μέγιστες. Άρα η ελεύθερη φασματική περιοχή της ακολουθίας των φίλτρων (περίοδος της συνάρτησης μεταφοράς) θα είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των περιόδων των $\check{Z}(f)$ και $\varphi(f)$.



Άσκηση 7

(β) Αν $f_1 = 500 \text{ GHz}$ και $f_2 = 600 \text{ GHz}$ η συνάρτηση μεταφοράς της ακολουθίας θα έχει ελεύθερη φασματική περιοχή ίση με $f_A = 3000 \text{ GHz}$. Ομοίως :

(γ) Αν $f_1 = 525 \text{ GHz}$ και $f_2 = 630 \text{ GHz}$, $f_A = 3150 \text{ GHz}$

(δ) Αν $f_1 = 475 \text{ GHz}$ και $f_2 = 630 \text{ GHz}$, $f_A = 59850 \text{ GHz}$

(ε) Αν $f_1 = 475 \text{ GHz}$ και $f_2 = 570 \text{ GHz}$, $f_A = 2850 \text{ GHz}$

(στ) Αν $f_1 = 525 \text{ GHz}$ και $f_2 = 570 \text{ GHz}$, $f_A = 19950 \text{ GHz}$